Épreuve : Mathématiques Durée : 3H	Devoir de synthèse n°2 ◉○◉○◉ 3ème Maths	Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (6,5 points)

Soit f *la fonction définie sur* $]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ *par :* $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) *Etudier la dérivabilité de* f *à gauche en* -1.
   Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
   b) *Etudier la dérivabilité de* f *à droite en* 3.
   Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
2. a) *Montrer que* f *est dérivable sur chacun des intervalles* $]-\infty,-1[$ *et* $]3,+\infty[$
   et que pour tout réel $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[\,;\ f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.
   b) *Drésser le tableau des variations de* f.
3. *Montrer que la droite d'équation* $x=1$ *est un axe de symétrie pour la courbe* $\mathscr{C}$.
4. a) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)$. *Que peut-on déduire ?*
   b) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)$. *Que peut-on déduire ?*
5. *Tracer la courbe* $\mathscr{C}$ *ainsi que ses asymptotes éventuelles.*

Exercice 2 (3,5 points)

On donne les nombres complexes suivants :

$a=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $b=1-i$ *et* $c=\dfrac{a}{b}$.

1. *Ecrire* a, b *et* c *sous forme trigonométrique.*
2. a) *Ecrire* c *sous forme algébrique.*
   b) *En déduire les valeurs exactes de* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
3. *Résoudre, dans* $]-\pi,\pi[$*, l'équation :* $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$.

Exercice 3 (5 points)

Partie I

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 0, 1, 1, 2 et quatre boules noires numérotées 0, 1, 2, 2.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tous les tirages possibles.
b) Quel est le nombre de tirages contenant exactement deux boules blanches ?
c) Déterminer le nombre des tirages dont la somme des numéros est paire.
d) Déterminer le nombre de tirages contenant une seule boule noire et une seule boule numéro 1

2. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tous les tirages possibles.
b) Déterminer le nombre des tirages dont le produit des numéros est nul.

Partie II

Une urne contient n boules blanches et n boules noires (n un entier naturel non nul). On tire simultanément n boules.

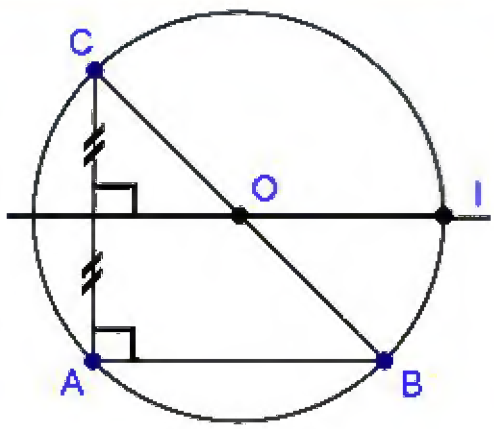
1. Déterminer, en fonction de n, le nombre de tirages possibles.
2. Soit p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

a) Démontrer que $\left(C_n^p\right)^2$ *tirages contenant exactement p boules blanches.*

b) En déduire alors la somme $S_n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$ *en fonction de n.*

Exercice 4 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-contre le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et (OI) est la médiatrice de [AC].
Reproduire la figure sur votre copie et la compléter au fur et à mesure.



Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ *qui transforme C en A.*

1. *Montrer que I est le centre de R.*
2. *Soit D l'image de A par R. Montrer que les points I, B et D sont alignés.*
3. *Soit Q le point de [AB] tel que* $AQ = CO$. *Montrer que* $R(O) = Q$.
4. *Les droites (IA) et (CB) se coupent en E. Montrer que* $R(E) = B$
5. *Soit F le symétrique de E par rapport à (OI).*
   Montrer que $R(F) = E$ *et déduire que les points E, Q et D sont alignés*