Épreuve : Mathématiques
Durée : 4H

Devoir de synthèse n°2

4ème Maths

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ *par :* $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x\in]-1,+\infty[$; $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt$.

b) En déduire que $\forall x\in]-1,+\infty[$, $g(x)\geq 0$.

2) a) Soit x un réel positif.

Montrer que pour tout réel $t\in[0,x]$ on a : $\dfrac{t}{(1+x)^2}\leq\dfrac{t}{(1+t)^2}\leq t$.

En déduire que : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2\leq g(x)\leq\dfrac{1}{2}x^2$. (1)

b) Soit x un réel de l'intervalle $]-1,0]$.

Montrer que pour tout $t\in[x,0]$ on a : $\dfrac{t}{(1+x)^2}\leq\dfrac{t}{(1+t)^2}\leq t$.

En déduire que : $\dfrac{1}{2}x^2\leq g(x)\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2$. (2)

3) À l'aide de (1) et (2), déterminer la limite de $\dfrac{g(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x\neq -1 \text{ et } x\neq 0\\ f(-1)=0 \text{ et } f(0)=1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier la continuité de f en 0 et à droite en -1.

2) a) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en -1.

b) Vérifier que pour tout réel $x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$; $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x}{\ln(1+x)}\left[\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{g(x)}{x^2}\right]$.

En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3) a) Montrer que pour tout réel $x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{[\ln(1+x)]^2}$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

4) *Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{2x}{2+x}-ln(1+x)$.*

a) Etudier le sens de variation de h.

b) En remarquant que $h(0)=0$, donner le signe de h sur $]-1,+\infty[$.

c) Vérifier que pour tout réel $x>-1$; $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{(x+2)h(x)}{2ln(x+1)}$.

En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

5) *Tracer $\mathscr{C}$ et T.*

Partie C

1) *a) Soit $x\in[0,+\infty[$. Vérifier que $\displaystyle\int_0^x \frac{t-x}{(1+t)^2}dt\le 0$ et déduire que $0\le g(x)\le \dfrac{x^2}{1+x}$.* (3)

b) À l'aide de (3), montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$; $\dfrac{x}{1+x}\le ln(1+x)\le x$.

c) En déduire que pour tout réel $x>0$; $\dfrac{1}{x+1}\le ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{x}$. (4)

2) *Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.*

a) À l'aide de (4), montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $-\dfrac{n}{n+1}\le ln(1+n)-u_n\le 0$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

c) Etudier la convergence de la suite $v : n\mapsto \dfrac{1}{n}(ln(1+n)-u_n)$

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $S(-1,0)$ et $I(4,0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est S et un foyer est O.

1) *a) Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\dfrac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) *a) Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est : $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.*

b) Construire (E).

3) *Soit f la fonction définie sur $[-1;9]$ par : $f(x)=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-(x-4)^2}$.*

On désigne par $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

F *la fonction définie sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $F(x)=\int_{-1}^{u(x)} f(t)dt$ *où* $u(x)=4+5\sin x$.

a) *Montrer que* $(E)=\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'$ *où* $\mathscr{C}'$ *est le symétrique de* $\mathscr{C}$ *par rapport à* $(O,\vec{i})$.

b) *Montrer que* F *est dérivable sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *et calculer* $F'(x)$.

c) *En déduire que pour tout* $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $F(x)=\frac{15}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

d) *Calculer alors l'aire de la region du plan délimitée par l'ellipse* (E).

Exercice 3

Soit $ABCD$ *un carré de centre* O *tel que* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I *et* J *les milieux respectifs des segments* $[AB]$ *et* $[AD]$.

1) *Soit* S *la similitude directe qui transforme* D *en* O *et* C *en* I.

a) *Vérifier que* S *est une similitude directe de rapport* $\frac{1}{2}$ *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$.

b) *Déterminer et construire le centre* Ω *de la similitude* S.

c) *Préciser les images respectives des droites* (BD) *et* (BC) *par* S

En déduire $S(B)$ *et* $S(A)$.

d) *Montrer que* Ω *est le barycentre des points pondérés* $(B,1)$ *et* $(J,4)$.

2) *Soit* g *la similitude indirecte telle que* $g(D)=O$ *et* $g(C)=I$.

a) *Vérifier que* $g=S_{(OI)}oS$ *puis déterminer* $g(B)$.

b) *Donner alors la forme réduite de* g.

3) *Soit* R *la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *et* $h=RoS$.

a) *Déterminer* $h(B)$ *puis caractériser* h.

b) *Soit* Ω' *le milieu de* $[\Omega B]$.

Montrer que le triangle $O\Omega\Omega'$ *est rectangle et isocèle en* O.

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

Partie A

1) a) *Posons* $G(x)=\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt.$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{(1+t)^2}$ *est continue sur* $]-1,+\infty[$ *et* $0\in]-1,+\infty[$ *donc* G *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *et on a* $G'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$.

La fonction g *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *et on a* $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}=G'(x)$

Donc il existe une constante réelle c *telle que* $\forall x\in]-1,+\infty[,\ g(x)=G(x)+c$

En particulier $g(0)=G(0)+c \Rightarrow c=0$ *et on a* $\forall x\in]-1,+\infty[,\ g(x)=G(x).$

b) ❖ *Si* $x\geq 0,\ \forall t\in[0,x]\ \frac{t}{(1+t)^2}\geq 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt\geq 0 \Rightarrow g(x)\geq 0.$

❖ *Si* $-1<x\leq 0,\ \forall t\in[x,0]\ \frac{t}{(1+t)^2}\leq 0 \Rightarrow \int_x^0 \frac{t}{(1+t)^2}dt\leq 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt\geq 0 \Rightarrow g(x)\geq 0.$

2) a) $0\leq t\leq x \Rightarrow 1\leq 1+t\leq 1+x \Rightarrow 1\leq (1+t)^2\leq (1+x)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}\leq \frac{1}{(1+t)^2}\leq 1$

Donc $\frac{t}{(1+x)^2}\leq \frac{t}{(1+t)^2}\leq t \qquad (car\ t\geq 0)$

$\forall t\in[0,x]$ *on a* $\frac{t}{(1+x)^2}\leq \frac{t}{(1+t)^2}\leq t \Rightarrow \int_0^x \frac{t}{(1+x)^2}dt\leq \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt\leq \int_0^x tdt$

Donc $\frac{1}{(1+x)^2}\int_0^x tdt\leq g(x)\leq \int_0^x tdt$ *ou encore* $\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x\leq g(x)\leq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$

Ce qui donne finalement $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\leq g(x)\leq \frac{1}{2}x^2.$ **(1)**

b) $-1<x\leq t\leq 0 \Rightarrow 0<1+x\leq 1+t\leq 1 \Rightarrow 0<(1+x)^2\leq (1+t)^2\leq 1 \Rightarrow 1\leq \frac{1}{(1+t)^2}\leq \frac{1}{(1+x)^2}$

Donc $\frac{t}{(1+x)^2}\leq \frac{t}{(1+t)^2}\leq t \qquad (car\ t\leq 0)$

$\forall t\in[x,0]$ *on a* $\frac{t}{(1+x)^2}\leq \frac{t}{(1+t)^2}\leq t \Rightarrow \int_x^0 \frac{t}{(1+x)^2}dt\leq \int_x^0 \frac{t}{(1+t)^2}dt\leq \int_x^0 tdt$

Donc $\frac{1}{(1+x)^2}\int_x^0 tdt\leq -g(x)\leq \int_x^0 tdt$ *ou encore* $\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^0\leq g(x)\leq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^0$

$\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\leq -g(x)\leq \frac{-1}{2}x^2$ *ce qui donne* $\frac{1}{2}x^2\leq g(x)\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$ **(2)**

3) $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[, \ \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{g(x)}{x^2} \le \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

$\begin{cases} \forall x \in]-1,0[, \ \frac{1}{2} \le \frac{g(x)}{x^2} \le \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Donc

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{ln(x+1)}{x}} = \frac{1}{1} = f(0) \Rightarrow f \text{ continue en } 0.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{ln(x+1)} = 0 = f(-1) \quad car \quad \lim\limits_{x\to -1^+} ln(x+1) = -\infty$

donc f *continue à droite en* -1

2) a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)ln(x+1)} = +\infty \quad car \quad \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)ln(x+1) = 0^-$

Donc f *n'est pas dérivable à droite en* 0.

b) $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{ln(x+1)} - 1}{x} = \frac{x - ln(x+1)}{x\,ln(x+1)} = \frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x}{ln(1+x)}\left[\frac{1}{x} - \frac{ln(x+1)}{x^2}\right]$

$= \frac{x}{ln(1+x)}\left[\frac{1}{x} - \frac{ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{x}{ln(1+x)}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x(1+x)} - \frac{ln(x+1)}{x^2}\right]$

$= \frac{x}{ln(1+x)}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{ln(x+1) - \frac{x}{1+x}}{x^2}\right] = \frac{x}{ln(1+x)}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{g(x)}{x^2}\right].$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(x)\left[\frac{1}{1+x} - \frac{g(x)}{x^2}\right] = f(0)\times\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Donc f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = \frac{1}{2}$.

c) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad donc \quad \boxed{T : y = \frac{1}{2}x + 1}.$

3) a) $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$;

$f'(x) = \frac{1\times ln(1+x) - \frac{1}{1+x}\times x}{(ln(1+x))^2} = \frac{g(x)}{(ln(1+x))^2}.$

b)

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	$\frac{1}{2}$	$+$
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4) a) h *dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *et on a :* $h'(x) = \frac{4}{(2+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{(2+x)^2(1+x)} \le 0$

$Donc\ h\ est\ décroissante\ sur\ ]-1,+\infty[.$

b) $\begin{cases} -1 < x \le 0 \Rightarrow h(x) \ge h(0)\ donc\ si\ x \le 0, h(x) \ge 0. \\ x \ge 0 \Rightarrow h(x) \le h(0)\ donc\ si\ x \ge 0, h(x) \le 0 \end{cases}$

c) $Pour\ x > -1\ et\ x \ne 0,\ f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{x}{ln(x+1)} - \frac{x+2}{2} = \frac{2x-(x+2)ln(1+x)}{2ln(1+x)}$

$$= \frac{(x+2)\left(\frac{2x}{x+2} - ln(1+x)\right)}{2ln(1+x)} = \frac{(x+2)h(x)}{2ln(1+x)}.$$

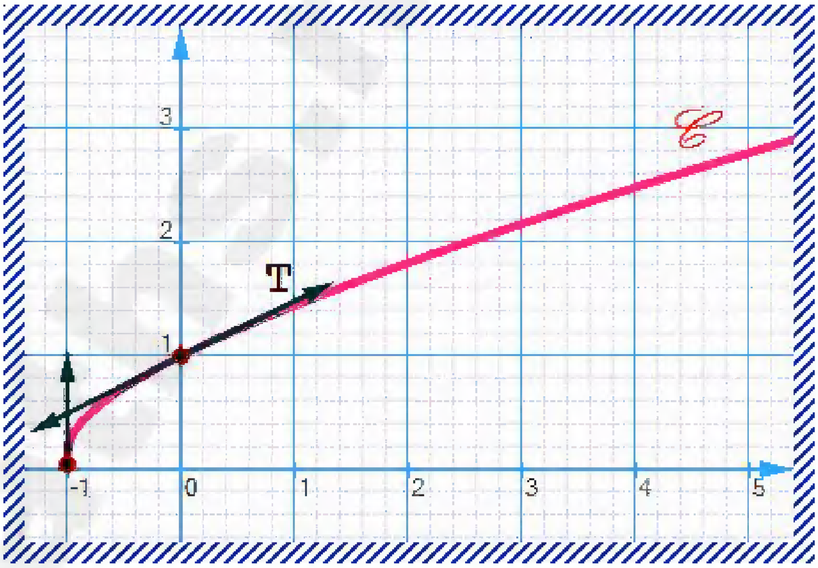
x	-1	0	$+\infty$
$ln(1+x)$	-	0	+
$h(x)$	+	0	-
$f(x)-(\frac{1}{2}x+1)$	-	0	-
Positions de $\mathscr{C}$ et T	$\mathscr{C}$ au dessous de T		$\mathscr{C}$ au dessous de T

5)

f n'est pas dérivable à droite en -1 et la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ln(1+x)} = 0$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche infinie de direction celle de $(O,\vec{i})$.



Partie C

1) a) $Soit\ x \in [0,+\infty[.\ \forall t \in [0,x],\ t-x \le 0 \Rightarrow \frac{t-x}{(1+t)^2} \le 0\ donc\ \int_0^x \frac{t-x}{(1+t)^2}dt \le 0$

$$\int_0^x \frac{t-x}{(1+t)^2}dt \le 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt - x\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt \le 0 \Rightarrow g(x) - x\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x \le 0$$

$$\Rightarrow g(x) + \frac{x}{x+1} - x \le 0 \Rightarrow g(x) - \frac{x^2}{x+1} \le 0\ et\ on\ sait\ que\ g(x) \ge 0\ donc\ 0 \le g(x) \le \frac{x^2}{x+1}$$

b) $D'après\ ce\ qui\ précède\ on\ a:\quad 0 \le ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \le \frac{x^2}{x+1}$

$$Donc\quad \frac{x}{1+x} \le ln(1+x) \le \frac{x^2}{1+x} + \frac{x}{1+x}\quad d'où\quad \frac{x}{1+x} \le ln(1+x) \le \frac{x(x+1)}{1+x} = x.$$

c) $Soit\ x > 0\ on\ a\ \frac{1}{x} > 0\ donc\ d'après\ l'encadrement\ précédent\ \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \le ln(1+\frac{1}{x}) \le \frac{1}{x}$

$$Donc\qquad \frac{1}{x+1} \le ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}.$$

2) a) $1 \le k \le n,\ \frac{1}{k+1} \le ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \le \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \le \sum_{k=1}^{n} (ln(k+1) - ln\,k) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \le \left(\cancel{ln 2} - ln 1\right) + \left(\cancel{ln 3} - \cancel{ln 2}\right) + \ldots + \left(ln(n+1) - \cancel{ln\,n}\right) \le u_n$

$Donc\ -\dfrac{n}{n+1} \le ln(n+1) - u_n \le 0.$

b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ ln(n+1) \le u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

c) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{ln(n+1)-u_n}{n} \le 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} La\ suite\ n \mapsto \dfrac{ln(n+1)-u_n}{n}\ est\ convergente \\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{ln(n+1)-u_n}{n} = 0 \end{array} \right.$

Exercice 2

1) a) *Un sommet de l'ellipse (E) est S(−1,0) et un foyer est O et son centre est le point I(4,0) donc $(O,\vec{i})$ est l'axe focal et son second foyer principal est S'(x,y) tel que* $\overrightarrow{IS'} = \overrightarrow{SI} \Leftrightarrow x-4 = 4+1\ et\ y=0 \Leftrightarrow x=9\ et\ y=0\ donc\ \boxed{S'(9,0)}$

On note B et B' les deux sommets secondaires et on pose $a = IS = 5,\ \ c = IF = 4$ *et* $b = IB = IB' = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{25-16} = 3$ *donc* $\boxed{B(4,3)}$ *et* $\boxed{B'(4,-3)}$.

b) *On sait que l'excentricité e est définie par* $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

c) *Dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$, le foyer O admet pour coordonnées (−4,0) et la directrice D associée au foyer O admet pour équation* $X = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$.

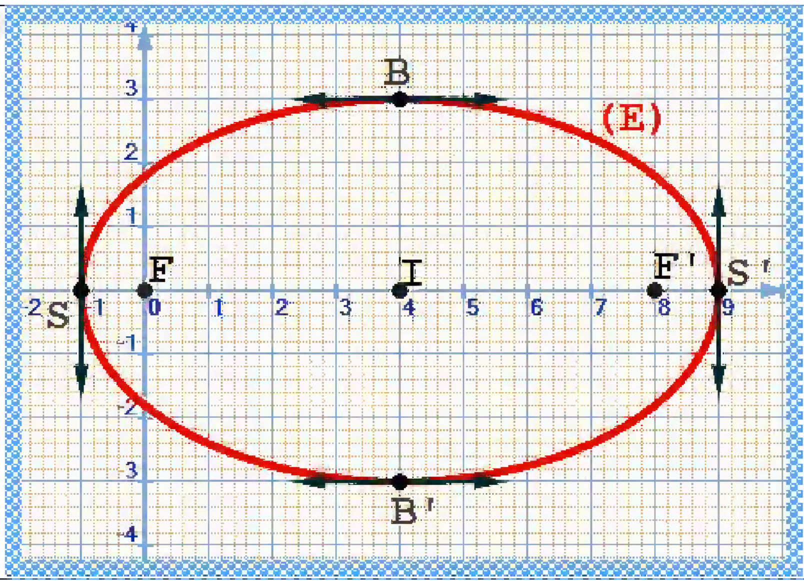
Soit M de coordonnées (X,Y) dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On a $\overrightarrow{IM} = X\vec{i} + Y\vec{j} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} = -4\vec{i} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x-4)\vec{i} + y\vec{j}$

Alors $X = x-4$ *et* $Y = y$. *Donc* $x = -\dfrac{25}{4} + 4 = -\dfrac{9}{4}$ *est une équation de D dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

2) a) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ *avec* $a = 5$ *et* $b = 3$ *est une équation de (E) dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$*

Donc $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *est une équation de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$*

b) -->



3) a) $M(x,y)\in E \Leftrightarrow \dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y^2=9\left(1-\dfrac{(x-4)^2}{25}\right)=\dfrac{9}{25}\left(25-(x-4)^2\right)$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-(x-4)^2}$ ou $y=-\dfrac{3}{5}\sqrt{25-(x-4)^2}$ avec $x\in[-1,9]$

$\Leftrightarrow \left(x\in[-1,9] \text{ et } y=f(x)\right) \text{ ou } \left(x\in[-1,9] \text{ et } y=-f(x)\right)$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}$ ou $M\in\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}'$ le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à $(O,\vec{i})$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'$

b)
- ❖ La fonction $u: x\mapsto 4+5\sin x$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
- ❖ La fonction $x\mapsto \frac{3}{5}\left(25-(x-4)^2\right)$ est continue et positive sur $[-1,9$ donc $]f$ est continue sur $[-1,9]$.
- ❖ $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $u(x)\in[-1,9]$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et on a : $F'(x)=u'(x)\times f(u(x))$ $=15\cos^2 x$.

c) $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)=15\cos^2 x$ et $F(-\frac{\pi}{2})=0$ donc $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}15\cos^2 t\,dt$

$$F(x)=\frac{15}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}(1+\cos 2t)dt=\frac{15}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{15}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

d) L'ellipse (E) est symétrique par rapport à $(O,\vec{i})$ donc l'aire $\mathcal{A}$ de la region délimitée par l'ellipse (E) est $\mathcal{A}=2\int_{-1}^{9}f(x)dx=2\int_{-1}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}f(x)dx=2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=15\pi$.

Exercice 3

1) a) Soient k et θ respectivement le rapport et l'angle de la similitude directe S.

$k=\dfrac{OI}{CD}=\dfrac{OI}{2OI}=\dfrac{1}{2}$ car $ABCD$ est un carré

$\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{IO}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JD}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DJ}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b)
- ❖ $S(D)=O\Rightarrow(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega O}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\Rightarrow\Omega\in$ au demi – cercle de diamètre $[DO]$ passant par J privé de D et O (noté $\mathscr{C}_1$).
- ❖ $S(C)=I\Rightarrow(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega I}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\Rightarrow\Omega\in$ au demi – cercle de diamètre $[CI]$ ne passant pas par B privé de C et I (noté $\mathscr{C}_2$).

Donc $\Omega\in\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2$. Voir figure

c) $S((BD))$ est la perpendiculaire à (BD) (car S d'angle $-\frac{\pi}{2}$) passant par $O=S(D)$
Donc $S((BD))=(AC)$.
$S((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $I=S(C)$ donc $S((BC))=(AB)$.
$\{B\}=(BD)\cap(BC)\Rightarrow\{S(B)\}=S((BD))\cap S((BC))=(AC)\cap(AB)=\{A\}\Rightarrow\boxed{S(B)=A}$.
$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{S(B)S(A)}=\overrightarrow{S(C)S(D)}$
$\Rightarrow\overrightarrow{AS(A)}=\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AJ}$ D'où $\boxed{S(A)=J}$.

d) S est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc SoS est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$ ou encore l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$.

En plus $SoS(B)=S\big(S(B)\big)=S(A)=J$ donc $\overrightarrow{\Omega J}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega B}\Rightarrow\overrightarrow{\Omega B}+4\overrightarrow{\Omega J}=\vec{0}$

D'où Ω est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(J,4)$.

2) a) ❖ g est la similitude indirecte telle que $g(D)=O$ et $g(C)=I$.

$S_{(OI)}oS$ est la composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte

❖ $S_{(OI)}oS(D)=S_{(OI)}(O)=O$ et $S_{(OI)}oS(C)=S_{(OI)}(I)=I$.

g et $S_{(OI)}oS$ sont deux similitudes indirectes qui coincident sur deux points distincts D et C donc $g=S_{(OI)}oS$.

$g(B)=S_{(OI)}oS(B)=S_{(OI)}(A)=B$.

b) $g(D)=O$ et $g(C)=I$ donc le rapport de g est égal à $\frac{OI}{DC}=\frac{1}{2}$.

g est une similitude indirecte de rapport $\neq 1$ et $g(B)=B$ donc B est le centre de g

Donc sa forme réduite est $g=S_\Delta oh_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}=h_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}oS_\Delta$ où Δ est l'axe de g

$g(D)=O\Leftrightarrow S_\Delta oh_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}(D)=O\Leftrightarrow S_\Delta(O)=O$ $\left(\text{car } \overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$ donc $O\in\Delta$

On sait aussi que $B\in\Delta$ $\big($car B est le centre de $g\big)$ Alors $\Delta=(OB)=(BD)$.

2) a) R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $h=RoS$.

$h(B)=R\big(S(B)\big)=R(A)=B$ car $S(B)=A$ et $\left(OB=OA \text{ et } (OA,OB)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right)$

RoS est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs 1 et $\frac{1}{2}$ et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ donc c'est une similitude directe de rapport $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$ ou encore h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

Or on a $h(B)=B$ donc B est le centre de h.

b) Ω' est le milieu de $[\Omega B]\Rightarrow\overrightarrow{B\Omega'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Omega}\Rightarrow h(\Omega)=\Omega'\Rightarrow R(S(\Omega))=\Omega'\Rightarrow R(\Omega)=\Omega'$

Donc $O\Omega'=O\Omega$ et $\widehat{(\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{O\Omega'})}\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ d'où $\Omega O\Omega'$ est rectangle et isocèle en O.