

Épreuve :

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

●○○○○●
3^{ème} Maths

Professeur :

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

2) a) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$

b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D .

c) Montrer que le point $\Omega(1,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

3) Tracer $\mathcal{C}$ et D .

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$.

On désigne par Γ la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les variations de g .

b) Calculer $g(1)$ et déduire les solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g(x) = 0$

c) Tracer la courbe Γ .

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $(f(x) - m)(g(x) - m) = 0$.

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

1) Soit E un point variable sur $[AB]$ et F est le point de $[AC]$ tel que $AF = BE$.

a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et F en E .

b) Montrer que r est d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) Montrer que $r(C) = A$.

d) En déduire que le centre O de la rotation r est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

2) On désigne par r^{-1} la rotation réciproque de r .

Soient P et Q les points tels que $P = S_A(B)$ et $Q = r^{-1}(P)$.

a) Montrer que C est le milieu de $[AQ]$.

b) En déduire que le triangle AOQ est rectangle en O .

3) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AQ]$ et $\mathcal{C}'$ son image par la rotation r .

a) Montrer que P est un point du cercle $\mathcal{C}$.

b) Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de P et $N = r(M)$.

Montrer que les points M , N et P sont alignés.

Exercice 3

Partie I – Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ et } z_C = -\sqrt{3} + i.$$

1) Déterminer chacun des ensembles suivants :

$$E = \left\{ M \in P \text{ d'affixe } z \text{ telles que } |z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = |z| \right\}.$$

$$F = \left\{ M \in P \text{ d'affixe } z \text{ telles que } |z + \sqrt{3} - i| = 2 \right\}.$$

2) a) Ecrire z_A , z_B et z_C sous forme trigonométrique.

b) Déduire que les points A , B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

c) Placer les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) Déterminer l'affixe du point D pour lequel $ABCD$ soit un parallélogramme.

Partie II – On donne le nombre complexe $U = z_B \times z_C$.

1) Ecrire U sous forme cartésienne.

2) Ecrire U sous forme trigonométrique.

3) Déduire alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et puis $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.