

Épreuve :

Mathématiques

Durée : 2H**Devoir de contrôle n°2****4^{ème} Maths****Professeur :**

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.

I) 1) a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(\sqrt{3})$.

c) Pour tout réel x , comparer $f(f^{-1}(-x))$ et $f(-f^{-1}(x))$ et déduire la parité de f^{-1} .

d) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

2) Soit la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b) En déduire que pour tout réel $x > 0$; $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$.

II – Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{\pi x}{2f^{-1}(x)}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que g est une fonction paire.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 1$ et déduire que g est continue en 0.

3) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout réel $t \in [0, x]$; $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

Pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x^2} \leq f^{-1}(x) \leq x$.

b) En déduire que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'_d(0)$.

4) a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ABC est un triangle équilatéral de centre O tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On donne les points I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

Le point D est le symétrique de O par rapport à I .

Partie A

Soit f la similitude directe qui transforme O en D et I en C .

1) a) Montrer que la similitude directe f admet pour rapport 2 et pour angle $\frac{2\pi}{3}$

b) Déterminer et construire le centre Ω de la similitude f (Figure feuille annexe)

2) Soit le point E image du point D par f .

Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ et placer le point E sur la figure.

3) a) Déterminer l'image de chacune des droites (OC) et (BC) par f .

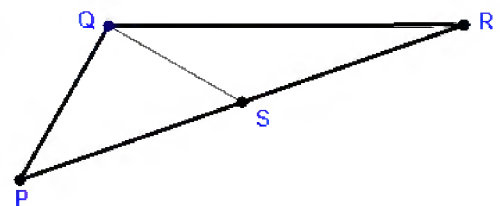
b) En déduire que $f(C) = A$ et $f(K) = J$.

4) a) Soit PQR un triangle tel que $QR = 2PQ$ et $\widehat{PQR} = \frac{2\pi}{3}$.

Montrer que si le point S est le milieu du

segment $[PR]$ alors $\widehat{SQR} = \frac{\pi}{6}$.

(On pourra utiliser la formule d'El Kashi).



b) Montrer que les points Ω, O et K sont alignés.

c) En déduire que les points Ω, J et D sont aussi alignés et que $3\overrightarrow{\Omega O} + 4\overrightarrow{\Omega K} = \vec{0}$.

Partie B

Soit g la similitude indirecte qui transforme O en D et I en C .

1) a) Déterminer le rapport de g .

b) Montrer que $g = f \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI) .

c) Déterminer $g(D)$ et déduire que le centre w de g vérifie $\overrightarrow{wE} = 4\overrightarrow{wO}$.

Construire w .

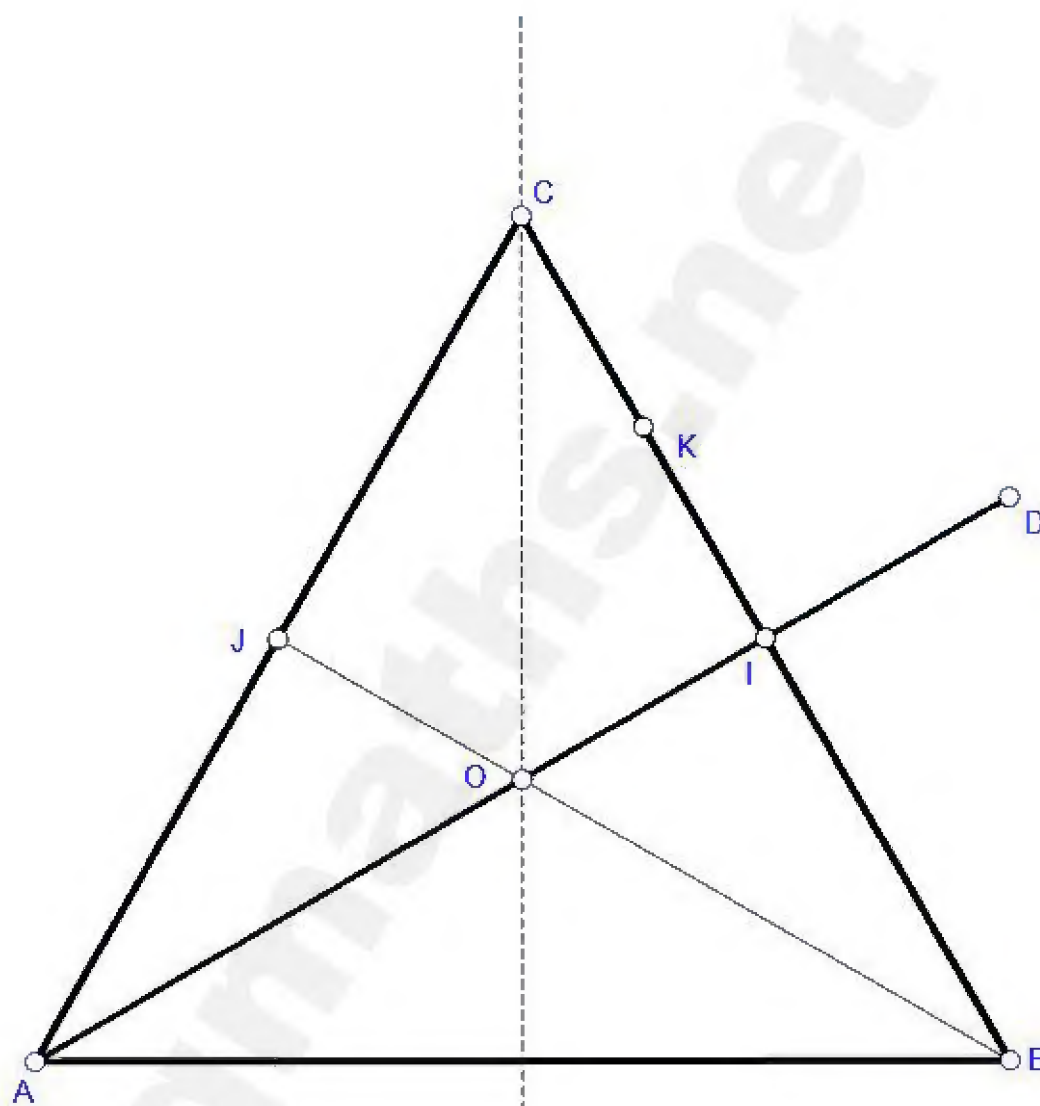
2) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte g . On pose $S_{\Delta}(I) = I'$.

a) Montrer que I' est le milieu du segment $[wC]$.

b) Déterminer et construire l'axe Δ de g .

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom :



CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

I - 1) a) f dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

b) f continue et strictement croissante

sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f réalise une bijection

de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

$$f^{-1}(1) = x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ donc } f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$f^{-1}(\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{3} \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ donc } f^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(f^{-1}(-x)) = -x$ et $f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x$ car f est impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(f^{-1}(-x)) = f(-f^{-1}(x)) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ car f est une bijection

Donc f^{-1} est impaire.

d) $\begin{cases} f \text{ dérivable sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. On pose $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$ et $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\Rightarrow \tan y = x \text{ donc } f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2) a) f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et } \forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = -\frac{1}{x^2} (f^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right) + (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

Donc il existe une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = c$

Pour $x = 1$ on a : $F(1) = 2f^{-1}(1) = c \Rightarrow c = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $F(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout réel $x > 0$.

II - 1) Soit $x \in \mathbb{R}^*, g(-x) = \frac{-x\pi}{2f^{-1}(-x)} = \frac{-x\pi}{-2f^{-1}(x)} = \frac{x\pi}{2f^{-1}(x)} = g(x)$ (car f^{-1} est impaire)

en plus $g(-0) = g(0)$ donc g est une fonction paire.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x} = (f^{-1})'(0) = 1 \text{ car } f^{-1} \text{ est dérivable en } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \frac{f^{-1}(x)}{x}} = \frac{\pi}{2 \times 1} = \frac{\pi}{2} = g(0) \Rightarrow g \text{ est continue en } 0.$$

$$3) a) 0 \leq t \leq x \Leftrightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$

Pour $x > 0$ on a f^{-1} dérivable sur $[0, x]$ et $\forall t \in]0, x[$, $\frac{1}{1+x^2} \leq (f^{-1})'(t) \leq 1$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis $\frac{x}{1+x^2} \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(0) \leq x$

ou encore $\frac{x}{1+x^2} \leq f^{-1}(x) \leq x$. Pour $x = 0$, l'encadrement est aussi vrai.

$$b) \forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} \leq f^{-1}(x) \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{f^{-1}(x)} \leq \frac{1+x^2}{x} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2x} \leq \frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} \leq \frac{\pi x(1+x^2)}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} x^2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} x^2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} - \frac{\pi}{2}}{x} \leq \frac{\pi}{2} x$$

$$\text{en plus } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} - \frac{\pi}{2}}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi x}{2 f^{-1}(x)} - \frac{\pi}{2}}{x} = 0 \Rightarrow g \text{ dérivable à droite en } 0 \text{ et } g'_d(0) = 0.$$

4) a) f^{-1} dérivable et non nul sur $\mathbb{R}^*$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$ on a :

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{f^{-1}(x) - x(f^{-1})'(x)}{(f^{-1}(x))^2} = \frac{\pi}{2} \frac{f^{-1}(x) - \frac{x}{1+x^2}}{(f^{-1}(x))^2}.$$

$$b) \text{ D'après 3)a) ; } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{-1}(x) - \frac{x}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) \geq 0.$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \right) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

En plus g est une fonction paire d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

Exercice 2

Partie A – 1) a) $k = \frac{DC}{OI} = \frac{OC}{OI} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6})} = 2$ car OIC est rectangle en I et $\widehat{OCI} = \frac{\pi}{6}$.

ou encore $k = \frac{OC}{OI} = \frac{OA}{OI} = \frac{2OI}{OI} = 2$.

$$\theta \equiv (\widehat{OI, DC}) \equiv (\widehat{ID, DC}) \equiv \pi + (\widehat{DI, DC}) \equiv \pi - (\widehat{OI, OC}) \quad [2\pi]$$

car une symétrie change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Donc $\theta \equiv \pi - (\widehat{OI, OC}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

b) $f(O) = D \Rightarrow (\widehat{\Omega O, \Omega D}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc Ω est un point de l'arc orienté $\widehat{DO}$ du cercle

$\mathcal{E}_1$ passant par D et O et tangent à la demi droite $[Ot)$ telle que $(\widehat{Ot, OD}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

privé des points O et D .

$f(I) = C \Rightarrow (\widehat{\Omega I, \Omega C}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc Ω est un point de l'arc orienté $\widehat{CI}$ du cercle

$\mathcal{E}_2$ passant par C et I et tangent à la demi droite $[Iz)$ telle que $(\widehat{Iz, IC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

privé des points I et C .

Donc $\{\Omega\} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Construction (Voir figure)

2) $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI}$, $f(O) = D$, $f(I) = C$ et $f(D) = E \Rightarrow \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$.

3) a) $\diamond f(O) = D$ et $f(C) = C' \Rightarrow (\widehat{OC, DC'}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

et puisqu'on a aussi $(\widehat{OC, DA}) \equiv (\widehat{OC, OA}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc $C' \in (DA)$

$C' \in (AD)$ et $f(O) = D \in (AD) \Rightarrow \boxed{f((OC)) = (AD)}$.

$\diamond (BC) \perp (AD)$, $I \in (BC)$ et $f((AD)) = f((OI)) = (CD)$ donc $f((BC))$ est la perpendiculaire à (CD) passant par $f(I) = C$ d'où $\boxed{f((BC)) = (AC)}$.

b) $\{C\} = (OC) \cap (BC) \Rightarrow \{f(C)\} = f((OC)) \cap f((BC)) = (AD) \cap (AC) = \{A\}$

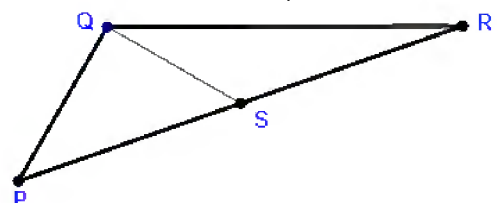
Donc $f(C) = A$.

$K = I * C \Rightarrow f(K) = f(I) * f(C) = C * A = J$ (conservation du milieu)

4) a) $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ \cdot QR \cdot \cos(\frac{2\pi}{3})$

$$= PQ^2 + 4PQ^2 + 2PQ^2 = 7PQ^2$$

Donc $PR = PQ\sqrt{7}$.



$$\cos(\widehat{PRQ}) = \frac{RQ^2 + RP^2 - PQ^2}{2 \cdot RQ \cdot RP} = \frac{4PQ^2 + 7PQ^2 - PQ^2}{2 \cdot 2 \cdot PQ \cdot PQ\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$QS^2 = RQ^2 + RS^2 - 2 \cdot RQ \cdot RS \cdot \cos(\widehat{PRQ}) = 4PQ^2 + \frac{7}{4}PQ^2 - 2 \cdot 2PQ \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}PQ \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{4}PQ^2$$

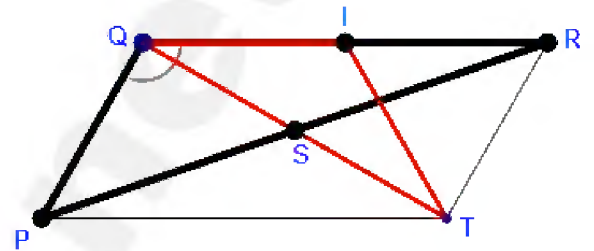
$$\text{Donc } QS = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ.$$

$$\text{Alors } \cos(\widehat{SQR}) = \frac{QR^2 + QS^2 - RS^2}{2 \cdot QR \cdot QS} = \frac{4PQ^2 + \frac{3}{4}PQ^2 - \frac{7}{4}PQ^2}{2 \cdot 2PQ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \widehat{SQR} = \frac{\pi}{6}.$$

Autrement

Soit $I = Q * R$ et le point T tel que $PQRT$ est un parallélogramme. Dans ce parallélogramme $\widehat{PQR} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{QRT} = \frac{\pi}{3}$ et puisque $RT = RI$, IRT équilatéral donc $IT = IR = IQ \Rightarrow QIT$ isocèle. QIT isocèle et $S = Q * T \Rightarrow (IS) \perp (QT)$ or $(IS) \parallel (QP)$

donc $(SQ) \perp (PQ)$ d'où $\widehat{RQS} = \frac{\pi}{6}$.



b) Dans le triangle ΩIC on a : $\Omega C = 2\Omega I$ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ (car $f(I) = C$)

Donc d'après 4)a) $\widehat{K\Omega C} = \frac{\pi}{6}$ et de même dans le triangle $O\Omega D$ on a : $\widehat{I\Omega O} = \frac{\pi}{2}$.

$$(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega O}) \equiv (\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega C}) + (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}) + (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega O}) \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \equiv -\pi [2\pi]$$

Ce qui prouve que Ω , K et O sont alignés.

c) On a : $K = I * C \Rightarrow f(K) = f(I) * f(C) = D * A = J \Rightarrow \boxed{f(K) = J}$

Ω , K et O sont alignés donc leurs images aussi d'où Ω , J et D alignés.

L'homothétie de centre Ω qui transforme O en K transforme aussi D en J car

$$(OD) \parallel (JK) \text{ et } \Omega, D, J \text{ alignés. Son rapport} = -\frac{KJ}{OD} = -\frac{\frac{1}{2}AI}{\frac{2}{3}AI} = -\frac{3}{4}.$$

$$K \text{ est l'image de } O \text{ par cette homothétie} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega K} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{\Omega O} \Rightarrow 3\overrightarrow{\Omega O} + 4\overrightarrow{\Omega K} = \vec{0}.$$

Partie B

1) a) $g(O) = D$ et $g(I) = C$ donc le rapport de g est $k' = \frac{CD}{OI} = 2$ (même rapport que f)

b) $foS_{(OI)}$ est la composée d'une similitude directe f et d'une similitude indirecte $S_{(OI)}$ donc c'est une similitude indirecte

$$foS_{(OI)}(O) = f(O) = D = g(O) \text{ et } foS_{(OI)}(I) = f(I) = C = g(I)$$

Donc $foS_{(OI)}$ et g sont deux similitudes indirectes qui coïncident sur deux points

