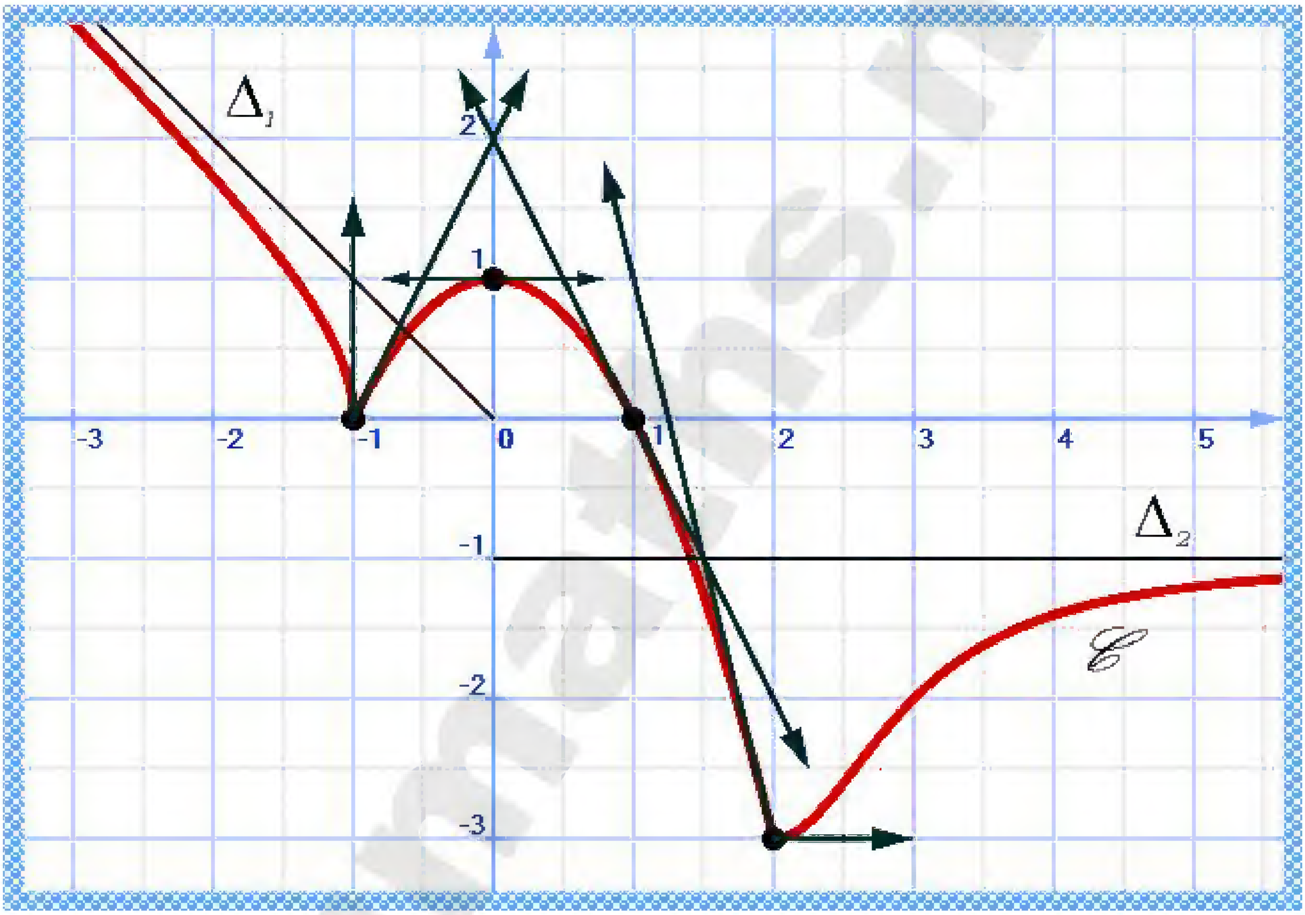
Épreuve : Mathématiques **Durée :** 3H	**Devoir de synthèse n°1** ◉○◉○◉ **4ème Maths**	**Professeur :** Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On a représenté, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et les droites asymptotes à cette courbe Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y=-x$ et $y=-1$.



En utilisant le graphique, comme source de données, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)}{x+1},\ \lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)}{x+1},\ \lim_{x\to2^-}\frac{f(x)+3}{x-2},\ \lim_{x\to2^+}\frac{f(x)+3}{x-2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-1}{x},\ \lim_{x\to0} f\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2) Déterminer $f'(1), (f\circ f)'(1)$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x(f\circ f)(x)-1}{x-1}$.

3) Déterminer $f\left(\left[-1,+\infty\right[\right)$, $f\left(\left]-1,1\right[\right)$ et $fof\left(\left]-\infty,-1\right]\right)$.

4) Drésser le tableau de variation de f.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

et vérifier que pour tout réel x non nul, $f'(x)=\dfrac{-1}{(\sqrt{1+x^2}+1)\sqrt{1+x^2}}$.

b) Montrer que pour tout réel x, $\left|f'(x)\right|\leq\frac{1}{2}$.

c) Drésser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet, dans $\mathbb{R}$, une seule solution $\alpha\in\left]0,65;0,7\right[$.

4) a) Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

c) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

5) Tracer $\mathscr{C}$ et T.

6) On définie la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$.

b) En déuire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|u_n-\alpha\right|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\alpha$.

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Soit ABC un triangle équilateral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On considère les points I et J milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) Faites une figure que l'on complétera au fur et à mesure qu'on avance dans l'exercice.

2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme B en A et C en B.

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle θ.

c) Déterminer et construire le centre Ω de la rotation f.

d) Déterminer l'image du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC par f.

3) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement g qui transforme B en A et C en B.

b) Vérifier que g ne peut pas être une symétrie orthogonale.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) On pose $h = fog^{-1}$.

a) Déterminer $h(A)$ et $h(B)$.

b) En déduire que pour tout point M du plan, $f(M)$ et $g(M)$ sont symétriques par rapport à (AB).

c) Déterminer et construire $g(\mathscr{C})$.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \overline{z} + 2i$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) En déduire que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

4) Soit θ un réel.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2(\cos\theta + i)z + 1 + 2ie^{i\theta} = 0$.

a) Vérifier que $\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2 = \left[i(\sin\theta - 1)\right]^2$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

c) Soit le point N d'affixe $2i + e^{-i\theta}$.

Montrer, par deux méthodes différentes, que si θ décrit $\mathbb{R}$ alors le point N varie sur un ensemble fixe que l'on déterminera.

Correction du devoir

Exercice 1

1) $*$ La droite d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=0$ ou encore $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0}$

$*$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

$*$ La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente verticale, à gauche, au point d'abscisse -1

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -1 et $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=+\infty$ ou $-\infty$.

En plus pour $x<-1$, $x+1<0$ et $f(x)>0$ ($\mathscr{C}$ au dessus de (Ox))

D'où $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)}{x+1}=-\infty}$.

$*$ La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente, à droite, au point d'abscisse -1 de coefficient directeur 2 donc f est dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1)=2$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f_d'(-1)=2\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=2}$.

$*$ La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente, à gauche, au point d'abscisse 2 de coefficient directeur -4 donc f est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2)=-4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f_g'(2)=-4\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)+3}{x-2}=-4}$.

$*$ La courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente horizontale, à droite, au point d'abscisse 2

Donc f est dérivable à droite en 2 et $f_d'(2)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f_d'(2)=0\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)+3}{x-2}=0}$.

$*$ La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{f(2x)-1}{2x}=\lim\limits_{t\to0}2\dfrac{f(t)-1}{t}=2\times0=0.$

$*$ $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-1$ (la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote au $V(+\infty)$)

2) La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente au point d'abscisse 1 de coefficient directeur -2 donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-2$

$(fof)'(1)=f'(1)\times f'(f(1))=-2\times f'(0)=-2\times0=0.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(fof)(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left[(fof)(x)-1\right]+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left[(fof)(x)-(fof)(1)\right]+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}x\frac{\left[(fof)(x)-(fof)(1)\right]}{x-1}+1=1\times(fof)'(1)+1=1.$$

3) $f\left([-1,+\infty[\right)=[-3,1];\quad f\left(]-1,1[\right)=]0,1];$

$fof\left(]-\infty,-1]\right)=f\left(f\left(]-\infty,-1]\right)\right)=f\left([0,+\infty[\right)=[-3,1].$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

Exercice 2

1) a) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}1-\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)=\lim_{x\to 0}1-\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=1=f(0)$

Donc f est continue en 0.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}+1}=-\frac{1}{2}$ donc f dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}.$

2) a) Sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive donc la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}-1$ est dérivable en plus la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable donc f est dérivable (produit et somme de fonctions dérivables.)

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)-\frac{1}{x}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+\cancel{x^2}-\sqrt{1+x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1-1-x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$

b) $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \sqrt{1+x^2}>1$ et $\sqrt{1+x^2}+1>2\Rightarrow\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})>2$

$\Rightarrow\ 0<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}<\frac{1}{2}$ donc $|f'(x)|\le\frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+1} = \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{x}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}} = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2 ↘	0

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-x$. On a $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$

g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0{,}65)\times g(0{,}7)=0{,}053\times(-0{,}015)<0$

donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution $\alpha\in\left]0{,}65;0{,}7\right[$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=f'(x)-1<0 \Rightarrow g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x)=0$ ou $f(x)=x$

4) a) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=1-\frac{\sqrt{1+(-x)^2}-1}{-x}=1+\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=2-\left(1-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=2-f(x)$

Donc le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie.

b) $T : y=f'(0)x+f(0)=-\frac{1}{2}x+1$ donc $T : y=-\frac{1}{2}x+1$.

c) $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{x}{2}-\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{x}{2}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$$= x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=x\frac{\sqrt{1+x^2}+1-2}{2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{x(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{x(1+x^2-1)}{2(\sqrt{1+x^2}+1)^2}=\frac{x^3}{2(\sqrt{1+x^2}+1)^2}.$$

Donc si $x<0$ alors $\mathscr{C}$ est au dessous de T.

si $x>0$ alors $\mathscr{C}$ est au dessus de T.

5)

6) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

b) Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = \alpha$ ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$

On a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$.

c) $\begin{cases} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1,1[\end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \alpha) + \alpha = \alpha. \\ \text{Donc la suite } (u_n) \text{ est convergente} \\ \text{et elle converge vers } \alpha. \end{array} \right.$

Exercice 3

1) Voir figure ci – dessous.

2) a) On a $BC = AB \neq 0$ donc il existe un seul déplacement f qui transforme B an A et C en B.

b) L'angle du déplacement f est $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \pi + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

f est un déplacement d'angle non nul θ donc f est une rotation d'angle θ.

c) $f(B) = A$ et $f(C) = B \Rightarrow \Omega \in med[AB] \cap med[BC]$.

d) Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$ et $f(\Omega) = \Omega$ en plus l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la rotation est un cercle de meme rayon donc $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$

3) a) On a $BC = AB \neq 0$ donc il existe un seul antidéplacement g qui transforme B an A et C en B.

b) Supposons que g est une symétrie orthogonale d'axe Δ.

On a : $g(B) = A$ et $g(C) = B \Rightarrow \Delta = med[AB] \cap med[BC] \Rightarrow med[AB] = med[BC]$

$\Rightarrow (AB) \parallel (BC)$ ce qui est impossible donc g n'est pas une symétrie orthogonale.

c) g est un antidéplacement qui n'est pas une symétrie orthogonale donc c'est une symétrie glissante. Soit Δ son axe et $\vec{u}$ son vecteur.

$g(B) = A \Rightarrow I = A * B \in \Delta$ et $g(C) = B \Rightarrow J = B * C \in \Delta$ donc $\Delta = (IJ)$

$gog(C) = g(g(C)) = g(B) = A = t_{2\vec{u}}(C) \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{JI}$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{JI}$.

4) a) $h(A) = f(g^{-1}(A)) = f(B) = A$ et $h(B) = f(g^{-1}(B)) = f(C) = B$.

b) h est la composé de l'antidéplacement g^{-1} et du déplacement f donc c'est un antidéplacement en plus h fixe les deux points distincts A et B donc h est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

$fog^{-1} = s_{(AB)} \Leftrightarrow f = S_{(AB)}og$ donc

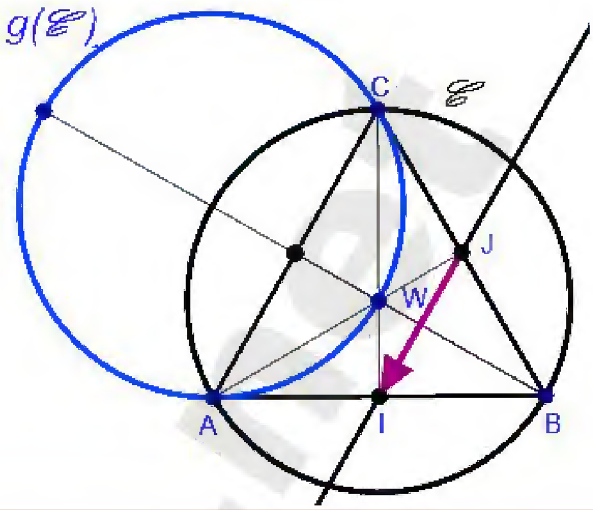
pour tout point M du plan

$f(M) = S_{(AB)}(g(M))$

D'où

$f(M)$ et $g(M)$ sont

symétriques par rapport à (AB).



c) $f(\mathscr{C}) = S_{(AB)}(g(\mathscr{C}))$

$\Leftrightarrow S_{(AB)}(g(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$

$\Leftrightarrow g(\mathscr{C}) = S_{(AB)}(\mathscr{C})$.

Exercice 4

1) Soient les points A et B et leurs images respectives A' et B' par f

On désigne par a, b, a' et b' leurs affixes respectives.

$$A'B' = |b' - a'| = \left|(\overline{b} + 2i) - (\overline{a} + 2i)\right| = \left|\overline{b} - \overline{a}\right| = \left|\overline{b - a}\right| = |b - a| = AB$$

D'où f conserve les distances donc f est une isométrie.

2) $f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \overline{z} + 2i = z \Leftrightarrow z - \overline{z} = 2i \Leftrightarrow 2i\mathrm{Im}(z) = 2i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 1$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite D d'équation $y = 1$.

3) $f(O) = A$ où A d'affixe $2i$ donc f est une isométrie différente de l'identité du plan qui fixe au moins deux points distincts (car f fixe tout point de la droite D) donc f est la symétrie orthogonale d'axe D.

4) a) $\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2 = (1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta - 2 = -(\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1)$

$$= -(\sin\theta - 1)^2 = [i(\sin\theta - 1)]^2.$$

b) $(E):\ z^2 - 2(\cos\theta + i)z + 1 + 2ie^{i\theta} = 0$.

$$\Delta = 4(\cos\theta + i)^2 - 4(1 + 2ie^{i\theta}) = 4\left(\cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 - 1 - 2i(\cos\theta + i\sin\theta)\right)$$

$$= 4\left(\cos^2\theta + \cancel{2i\cos\theta} - 2 - \cancel{2i\cos\theta} + 2\sin\theta\right) = 4\left(\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2\right) = [2i(\sin\theta - 1)]^2.$$

Donc les solutions sont : $z' = \dfrac{2(\cos\theta + i) + 2i(\sin\theta - 1)}{2} = \dfrac{2(\cos\theta + i\sin\theta)}{2} = e^{i\theta}$

et $z'' = \dfrac{2(\cos\theta + i) - 2i(\sin\theta - 1)}{2} = \dfrac{2(\cos\theta - i\sin\theta + 2i)}{2} = e^{-i\theta} + 2i.$

c) <u>1^{er} méthode</u> : Soient les points M et N d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{-i\theta} + 2i$.

On remarque que $b = \overline{a} + 2i$ donc d'après les questions précédentes $N = f(M)$

Or si θ décrit $\mathbb{R}$ alors le point $M(a)$ décrit le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$

Donc le point N varie sur le cercle $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D qui est le cercle de centre $A(2i)$ (car $f(O) = A$) et de rayon 1.

2ème Méthode : $b = e^{-i\theta} + 2i \Leftrightarrow b - 2i = e^{-i\theta}$ donc $|b - 2i| = 1$ ou encore $AN = 1$ donc si θ décrit $\mathbb{R}$ alors le point N varie sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $A(2i)$ et de rayon 1