Épreuve :

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

★☆★★☆★

4ème Maths

Professeur :

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout réel non nul x par : $f(x) = x + 1 - \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.*

2) a) *Vérifier que pour tout réel non nul x on a : $\left|\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|}$.*

   b) *Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$*

   c) *Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique que l'on précisera.*

3) *Dans la suite de l'exercice, on admet que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[3,+\infty[$.*

   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]0,5;1[$, une seule solution α.

4) *Soit n un entier superieur à 3.*

   a) *Montrer que l'équation $f(x) = n + \dfrac{3}{2}$ admet, dans l'intervalle $]n, n+1[$, une seule solution x_n.*

   b) *Montrer que la suite (x_n) est croissante et déterminer sa limite.*

Exercice 2

Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{18 + 3u_n}$.

1) *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $3 \leq u_n \leq 6$.*

2) a) *Etudier le sens de variation de la suite (u_n).*

   b) *En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.*

3) *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{6} \leq 1$ donc il existe un seul réel $\theta_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = 6\cos(\theta_n)$.*

   a) *Montrer que (θ_n) est une suite géométrique dont – on précisera la raison q et le premier terme θ_0.*

   b) *Pour tout entier naturel n, exprimer θ_n en fonction de n.*

   c) *Retrouver les résultats du 2)b).*

Exercice 3

Soit $Z = \dfrac{2i - z}{z + i - 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $M(x, y)$ l'affixe de z.

1) Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z.

2) Déterminer l'ensemble E des points M tel que Z soit réel.

3) Déterminer l'ensemble F des points M tel que Z soit imaginaire.

4) En déduire l'ensemble G des points M tel que l'on ait : $Arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Exercice 4

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41.$

1) Montrer que si z est une solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $\overline{z}$ est aussi une solution de cette équation.

2) Montrer que i est une solution de l'équation $f(z) = 0$ et déduire une autre solution.

3) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$.

b) Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 3cm).

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives

$z_A = -i,\ \ z_B = i,\ \ z_C = \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3}i \ \ \text{et} \ \ z_D = \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{3}i.$

a) Placer les points A, B, C et D

b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ sont deux nombres complexes imaginaires.

c) En déduire la nature de chacun des triangles ACD et CBD.

d) Montrer que les points A, B, C et D appartennent à un meme cercle dont on précisera le centre et le rayon.

©All rights reserved

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x+1-\pi\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1-\pi\times 1 = 1-\pi.$

f admet une limite finie en 0 donc f est prolongeable par continuité en 0.

2) a) Pour tout réel non nul x, $|\sin(\pi x)| \le 1 \Rightarrow \dfrac{|\sin(\pi x)|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \Rightarrow \left|\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|}.$

b) $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}^*;\ \left|\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|}. \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0 \left(\text{resp. } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0\right) \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = 0 \left(\text{resp. } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = 0\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

3) f est continue sur $[0,5;1]$ (rapport et puis somme de fonctions continues)

en plus $f(0,5)\times f(1) = \left(1,5-\dfrac{\sin(\pi/2)}{0,5}\right)\times\left(2-\dfrac{\sin\pi}{1}\right) = -0,5\times 2 = -1 < 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]0,5;1[$ et puisque f est strictement croissante sur $[0,5;1]$ alors α est l'unique solution dans $]0,5;1[$.

4) a) Soient n un entier superieur à 3 et g la fonction définie sur l'intervalle $[n,n+1]$

par $g(x) = f(x) - \left(n+\dfrac{3}{2}\right).$

g est continue sur $[n,n+1]$ et $g(n)\times g(n+1) = (-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$ donc l'équation $g(x)=0$ (ou $f(x) = n+\frac{3}{2}$) admet au moins une solution $x_n \in]n,n+1[$.

$[n,n+1] \subset [3,+\infty[$ (car $n\ge 3$) et f strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[n,n+1]$ d'où l'unicité de x_n dans $]n,n+1[$.

b) Pour tout entier $n\ge 3$, on a :

$n < x_n < n+1 < x_{n+1} < n+2 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$ donc la suite (x_n) est croissante

$n < x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$

Exercice 2

1) **Initialisation :** Pour $n=0$, $u_0 = 3 \in [3,6]$ ce qui est vrai.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $3\le u_n\le 6$ et montrons que $3\le x_{n+1}\le 6$.

$3\le u_n\le 6 \Rightarrow 9\le 3u_n\le 18 \Rightarrow 27\le 18+3u_n\le 36 \Rightarrow \sqrt{27}\le\sqrt{18+3u_n}\le 6$

or $3\le\sqrt{27}$ donc $3\le u_{n+1}\le 6.$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \le u_n \le 6.$

2) a) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{18+3u_n} - u_n = \dfrac{18+3u_n - u_n^{\ 2}}{\sqrt{18+3u_n} - u_n} = \dfrac{(6-u_n)(3+u_n)}{\sqrt{18+3u_n} + u_n} \ge 0 \quad car \quad 3 \le u_n \le 6$

Donc la suite (u_n) est croissante.

b) *La suite (u_n) est croissante et majorée (par 6) donc (u_n) est convergente*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f \text{ la fonction qui à } x \mapsto \sqrt{18+3x} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in [3,6] \\ f \text{ continue sur } [3,6] \subset [-6,+\infty[\end{cases}$$

Donc $f(l) = l$

$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{18+3l} = l \Leftrightarrow 18+3l = l^2 \text{ et } l \ge 0 \Leftrightarrow l^2 - 3l - 18 = 0 \text{ et } l \ge 0 \Leftrightarrow l = 6.$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6.$

3) a) $u_{n+1} = 6\cos(\theta_{n+1}) = \sqrt{18+3u_n} = \sqrt{18+3\times 6\cos(\theta_n)} = \sqrt{18(1+\cos(\theta_n))}$

$$= \sqrt{36\cos^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = 6\left|\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right| = 6\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad car \quad \left(\frac{\theta_n}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0\right)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_{n+1}) = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ avec } \theta_{n+1} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \frac{\theta_n}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad d'où \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

Donc (θ_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

On a $u_0 = 3 = 6\cos\theta_0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \dfrac{1}{2}$ *et puisue* $\theta_0 \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *donc* $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

b) *(θ_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier tèrme $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$.*

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \theta_n = \theta_0 q^n = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \dfrac{1}{2} \in]-1,1[\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0.$

La fonction cosinus est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\cos\theta_n = 6\cos 0 = 6.$

La suite (u_n) est alors convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6.$

Exercice 3

1) $Z = \dfrac{2i - z}{z + i - 1} = \dfrac{-x + i(2-y)}{(x-1) + i(y+1)} = \dfrac{[-x + i(2-y)][(x-1) - i(y+1)]}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$

$$= \frac{-x(x-1) + (2-y)(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2} + i\frac{x(y+1) + (2-y)(x-1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \frac{(-x^2 - y^2 + x + y + 2) + i(3x + y - 2)}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

Donc $X = \dfrac{-x^2 - y^2 + x + y + 2}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ *et* $Y = \dfrac{3x + y - 2}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

2) Z est réel $\Leftrightarrow Y=0 \Leftrightarrow 3x+y-2=0$ et $(x-1)^2+(y+1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow y=-3x+2$ et $(x,y)\neq(1,-1)$

Le point $A(1,-1)$ appartient à la droite $\Delta : y=-3x+2$ (car $-1=-3\times 1+2$)

Donc E est la droite $\Delta : y=-3x+2$ privée du point A.

3) Z est imaginaire $\Leftrightarrow X=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-2=0$ et $(x,y)\neq(1,-1)$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)+(y^2-y)=2 \text{ et } (x,y)\neq(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=2 \text{ et } (x,y)\neq(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \text{ et } (x,y)\neq(1,-1)$$

Donc F est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ privée du point A (car $A\in\mathscr{C}$)

4) $Arg(Z)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow X=0$ et $Y>0 \Leftrightarrow M\in\mathscr{C}$ tel que $y+3x-2>0$

Cherchons $\mathscr{C}\cap\Delta : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-3x+2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-3x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow 10x^2-10x+\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

Donc $\mathscr{C}\cap\Delta=\{A(1,-1);B(0,2)\}$

Alors G est l'arc du cercle $\mathscr{C}$ situé au dessus de la droite Δ privé des points A et B

Remarque : $I\in\Delta$ donc B est le symétrique de A par rapport à I.

Exercice 4

1) $f(z)=0 \Leftrightarrow \overline{f(z)}=\overline{0} \Leftrightarrow \overline{9z^4-24z^3+50z^2-24z+41}=0 \Leftrightarrow \overline{9z^4}-\overline{24z^3}+\overline{50z^2}-\overline{24z}+\overline{41}=0$

$\Leftrightarrow 9\overline{z}^4-24\overline{z}^3+50\overline{z}^2-24\overline{z}+41=0 \Leftrightarrow f(\overline{z})=0 \Leftrightarrow \overline{z}$ est une solution de l'équation $f(z)=0$

2) $f(i)=9i^4-24i^3+50i^2-24i+41=9+24i-50-24i+41=24i-24i-50+50=0$

Donc i est une solution de l'équation $f(z)=0$

i est une solution de $f(z)=0$ donc d'apès 1) $\overline{i}=-i$ est aussi une solution de $f(z)=0$.

3) a) $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z)=(z^2+1)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+(c+a)z^2+bz+c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-24 \\ c+a=50 \\ c=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-24 \\ c=41 \\ c+a=41+9=50 \text{ vrai} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=(z^2+1)(9z^2-24z+41)}$$

b) $f(z)=0 \Leftrightarrow z^2+1=0$ ou $9z^2-24z+41=0 \Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$ ou $9z^2-24z+41=0$

$\Delta=24^2-4\times 9\times 41=-900=(30i)^2$ donc les deux autres solutions sont :

$$z' = \frac{24-30i}{18} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i \text{ et } z'' = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i. \text{ Donc } S_{\mathbb{C}} = \left\{-i, i, \frac{4}{3}+\frac{5}{3}i, \frac{4}{3}-\frac{5}{3}i\right\}$$

4) a) Voir figure.

b) $$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}i+i}{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i+i} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}i} = \frac{4(1+2i)}{2(2-i)} = 2\frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{2}{5}(2+i+4i-2) = 2i$$

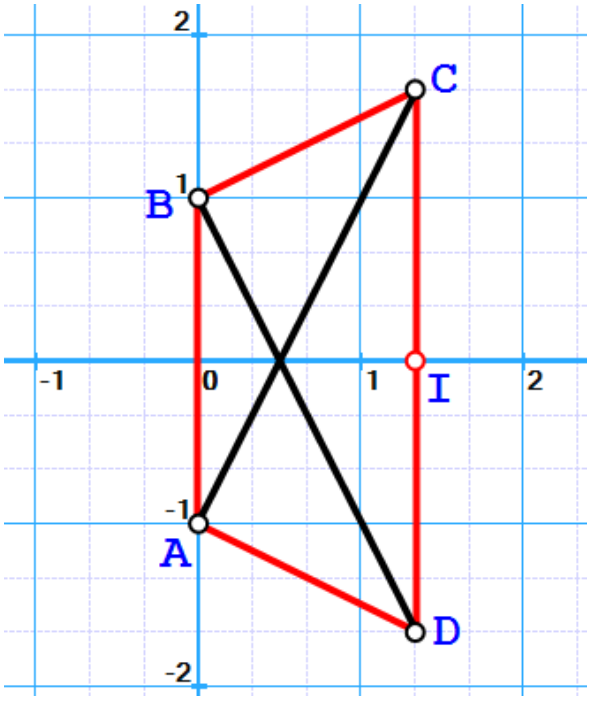
$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}i-i}{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i-i} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i}{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}i} = \frac{2(2+i)}{4(1-2i)} = \frac{1}{2}\frac{(2+i)(1+2i)}{5} = \frac{1}{10}(2+i+4i-2) = \frac{1}{2}i$$

Donc chacun des nombres complexes $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ *et* $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ *est imaginaire*

c) $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ *imaginaire* $\Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ *le triangle ACD est rectangle en A.*

$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ *imaginaire* $\Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ *le triangle BCD est rectangle en B.*

d) *Le triangles ACD est rectangle en A* $\Rightarrow$ *A est un point du cercle* $\mathscr{C}$ *de diamètre* $[CD]$

Le triangles BCD est rectangle en B $\Rightarrow$ *B est un point du cercle* $\mathscr{C}$

Donc Les points A, B, C et D sont des points du cercle $\mathscr{C}$ *de centre* $I = C * D$ *et de rayon* $\frac{5}{3}$.