Épreuve : Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°3

3ème Math

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$*, par :* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+u_n}$.

1) *Déterminer les valeurs de* u_0 *pour lesquelles la suite* (u_n) *est constante.*
   Dans la suite de l'exercice, on prendra $u_0 = 1$

2) a) *Vérifier que pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = 3\left(1 - \dfrac{1}{1+u_n}\right)$.

   b) *Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
   $1 \le u_n < 2$.

   c) *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

3) *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

   a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géometrique dont on précisera la raison.*

   b) *Exprimer* v_n *et puis* u_n *en fonction de* n.

   c) *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et préciser sa limite.*

4) a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \le \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$

   b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c) *Retrouver alors le résultat de la question 3) c).*

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*, on considère les points* $A(3,0,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(1,-1,0)$ *et* $D(1,1,-2)$.

1) *Déterminer les composantes du vecteur* $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   En déduire que les points A, B *et* C *forment un plan* P *dont – on donnera une équation cartésienne.*

2) a) *Déterminer une représentation paramètrique de la droite* Δ *passant par* D *et dont un vecteur directeur est* $\vec{n}$.

   b) *Vérifier que le point* H *intersection de* Δ *avec le plan* P *admet pour coordonnées* $\left(\dfrac{9}{5}, -1, -\dfrac{8}{5}\right)$.

c) Calculer DH distance du point D au plan P.

3) Donner une équation cartésienne du plan Q contenant Δ et passant par A.

Exercice 3

1) Calculer le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 5^n pour tout entier $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

2) a) Montrer par récurrence que $5^{4n}-1$ est divisible par 13.

b) En déduire que $5^{4n+1}-5$, $5^{4n+2}-12$ et $5^{4n+3}-8$ sont divisibles par 13.

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne du nombre 5^{2019} par 13 .

3) On considère le nombre $A_p = 5^{2p}+5^{4p}$ où p est un entier naturel.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A_p par 13 tel que $p=2n$ où $n\in\mathbb{N}$.

b) Montrer que si $p=2n+1$ où $n\in\mathbb{N}$ alors A_p est divisible par 13

Exercice 4

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i

Pour tout point $M(z)$, distinct de B, du plan P on associe le point $M'(z')$

tel que $z' = \dfrac{z}{z-i}$

1) On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Montrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \\ y' = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$

b) En déduire alors les ensembles suivants :

$E = \{M(z)\in P \text{ tq } z'\in\mathbb{R}\}$

$F = \{M(z)\in P \text{ tq } z' \text{ imaginaire}\}$

2) a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$; vérifier que $z'-1 = \dfrac{i}{z-i}$

b) En déduire que si le point $M(z)$ varie sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1 alors le point $M'(z')$ varie sur un cercle $\mathscr{C}'$ que l'on précisera.

c) Soit θ une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{BM})$ où M est un point distinct de B.

Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})$ en fonction de θ.