Épreuve : Mathématiques Durée : 3H	Devoir de synthèse n°3 ◉○◉○◉ 4ème Sc. expérimentales	Professeurs : Mr : Dhaouadi Nejib & Mr : Bellili Mongi

Exercice 1

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 2$

1) Dresser le tableau des variations de g

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution α et que $0,8 < \alpha < 0,9$

b) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2}$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et l'asymptote Δ.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par, la droite Δ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 0]$ on a : $\dfrac{1}{3}(x+1)e^x \leq \dfrac{(x+1)e^x}{e^x + 2} \leq \dfrac{e^x}{e^x + 2}$.

b) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{0} (x+1)e^x dx$.

c) Montrer alors que $\dfrac{1}{3e} \leq A \leq \ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$

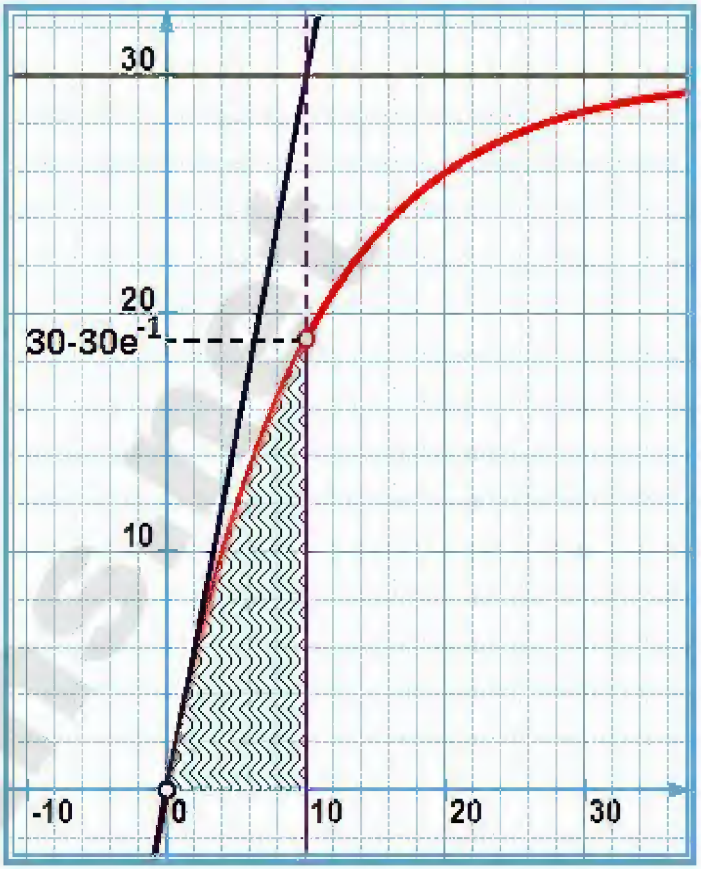
Exercice 2

Dans la figure suivante :

• *La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique Dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f Solution de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.*

• *On a tracé la tangente à $\mathscr{C}$ au point O.*

• $f(10) = 30 - 30.e^{-1}$



On désigne par S l'aire en ua de la partie du plan hachurée et on admet que $S = 300.e^{-1}$.

1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire que $b = 3$.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = \frac{1}{a}(f'(x) - 3).$$

b) Déduire que $S = -\dfrac{30e^{-1}}{a}$.

c) Montrer alors que $a = -0,1$.

3) Montrer que pour tout réel x on a :

$f(x) = 30 - 30.e^{-0,1.x}$. (On rappelle qu f est la solution de l'équation différentielle : $y' = -0,1y + 3$)

4) On admet que la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ modélise les variations de la température $\theta(t)$ (exprimée en degré Celsius) en fonction du temps t (exprimé en minutes) d'un corps placé à un temps initial $t = 0$ dans un endroit à température ambiante constante.

On a alors : $\theta(t) = 30 - 30.e^{-0,1.t}$.

a) Déterminer la température du corps au bout de 20 minutes.

b) Déterminer, à 10^{-1} prés, le temps t_0 à partir du quel la température dépassera 29°C.

c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t)$ puis interpréter le résultat.

Exercice 3

Un responsable de magasin achète en grand nombre des pièces mécaniques d'un fournisseur.

50% de ces pièces sont d'origines dont 2% sont défectueuses.

Le reste des pièces sont adaptables et dont 20% sont défectueuses.

On prélève au hasard une pièce et considère les événements suivants :

- *D : << La pièce est défectueuse >>*
- *O : << La pièce est d'origine >>*

1) a) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et d'origine ?

b) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et adaptable ?

c) Montrer que la probabilité p pour que la pièce prélevée soit non défectueuse est $p = 0,89$.

2) La durée de vie d'une pièce mécanique non défectueuse (exprimée en années) est une variable aléatoire continue X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Sachant que $p(X \geq 8) = 0,3$ *, déterminer la valeur, arrondie à* 10^{-1} *près, de* λ.
Par la suite on prendra $\lambda = 0,15$.

b) Calculer la probabilité pour que cette pièce ait une durée de vie inferieure à 18 mois.

c) Sachant qu'une pièce a déjà 5 ans de fonctionnement, quelle la probabilité pour qu'elle ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

3) a) Le responsable de magasin décide de commander 10 pièces étudiées qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre et ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?
Quelle la probabilité pour qu'il avait au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?

b) Déterminer le nombre minimal n des pièces qu'il doit commander pour que la probabilité d'avoir au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans dans sa commande soit supérieure à 0,998 ?

Exercice 4

Craignant une propagation d'une grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines consécutives. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations y	540	720	990	1340	1810	2440	3300

On pose $z = \ln y$

1) Recopie et compléter le tableau suivant : les résultats sont arrondis à 10^{-2} *près.*

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$	6,29	6,58	6,90				

2) a) Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique puis interpréter le résultat obtenu.

b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

c) Déduire que $y = \alpha.e^{\beta x}$ *où* α *et* β *sont deux réels à préciser.*

3) a) Donner une estimation du nombre des consultations hebdomadaire concernant cette grippe pendant la dixième semaine.

b) Déterminer la semaine a partir de laquelle le nombre de consultations dépasse le quart de la population.

sigmaths.net

All rights reserved © 2019

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

Partie I

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-2	↘	$-e^{-1}-2$	↗	$+\infty$

1) $g(x)=xe^x-2$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$g'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

D'où le tableau de variation

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$

a) $\forall x\in]-\infty,-1]$, $g(x)\in[-e^{-1}-2,-2[$ donc $g(x)\neq 0$

Sur $[-1,+\infty[$, g est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $g([-1,+\infty[)=[-e^{-1}-2,+\infty[$ qui contient 0 donc il existe et unique $\alpha\in[-1,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$ et puisque $g(0,8)\times g(0,9)=(-0,22)\times 0,21<0$ alors $0,8<\alpha<0,9$.

b) $\forall x\in]-\infty,-1]$, $g(x)<0$

g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$

donc $-1\le x<\alpha\Rightarrow g(x)<g(\alpha)=0$ et $x>\alpha\Rightarrow g(x)>g(\alpha)=0$

Conclusion : $\forall x\in]-\infty,\alpha[$, $g(x)<0$; $\forall x\in]\alpha,+\infty[$, $g(x)>0$ et $g(\alpha)=0$.

Partie II

1) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x(1-2xe^{-x})}{e^x(1+2e^{-x})}=\dfrac{1-2xe^{-x}}{1+2e^{-x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-(-x)e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty}-Xe^X=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2x+xe^x+2x}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+xe^x}{e^x+2}=\dfrac{0+0}{0+2}=0$.

Donc la droite Δ d'équation $y=-x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

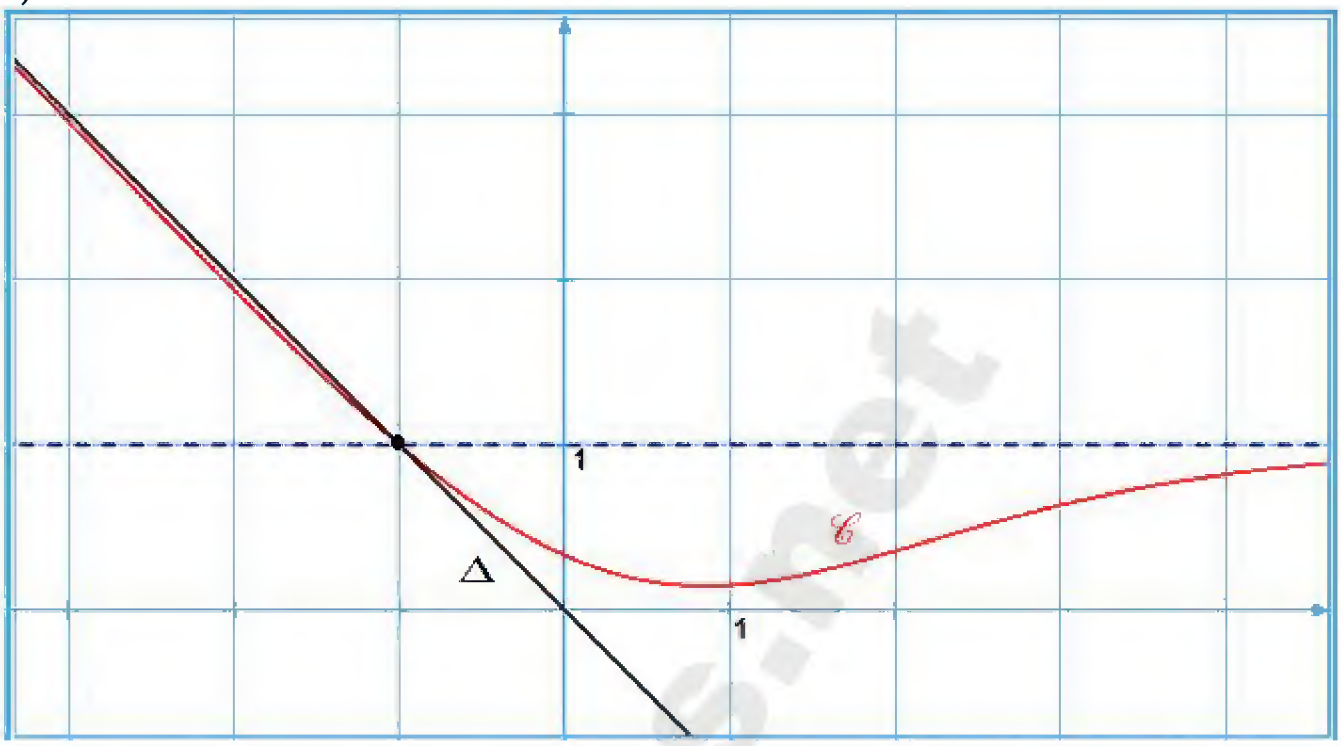
c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+x=\dfrac{(1+x)e^x}{e^x+2}$ donc admet le signe de $1+x$. Alors la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de Δ sur $]-\infty,-1]$ et au dessus de Δ sur $[-1,+\infty[$.

2) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{(e^x-2)(e^x+2)-e^x(e^x-2x)}{(e^x+2)^2}=\dfrac{e^{2x}-4-e^{2x}+2xe^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{2(xe^x-2)}{(e^x+2)^2}=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	1

c) $g(\alpha)=0 \Rightarrow e^{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$ donc $f(\alpha)=\dfrac{\frac{2}{\alpha}-2\alpha}{\frac{2}{\alpha}+2}=\dfrac{2-2\alpha^2}{2+2\alpha}=\dfrac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{2(1+\alpha)}=1-\alpha.$

3)



4) a) $-1\le x\le 0 \Rightarrow 0<e^x\le 1 \Rightarrow 2<e^x+2\le 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{e^x+2}<\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{(x+1)e^x}{3}\le\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}$

et $x+1\le 1 \Rightarrow \dfrac{e^x}{e^x+2}.(x+1)\le\dfrac{e^x}{e^x+2}$ car $\dfrac{e^x}{e^x+2}>0$

Donc $\forall x\in[-1,0];\ \dfrac{(x+1)e^x}{3}\le\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}\le\dfrac{e^x}{e^x+2}.$

b) On pose $\begin{cases}u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1\\ v'(x)=e^x\Leftarrow v(x)=e^x\end{cases}$ donc $\left|\begin{array}{l}\int_{-1}^{0}(x+1)e^x dx=\left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^x dx\\ \qquad=1-\left[e^x\right]_{-1}^{0}=1-1+e^{-1}=e^{-1}\end{array}\right.$

c) $A=\int_{-1}^{0}(f(x)+x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}dx.$

et $\int_{-1}^{0}\dfrac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln(e^x+2)\right]_{-1}^{0}=\ln 3-\ln(e^{-1}+2)=\ln\left(\dfrac{3}{e^{-1}+2}\right)=\ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$

$\forall x\in[-1,0];\ \dfrac{(x+1)e^x}{3}\le\dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2}\le\dfrac{e^x}{e^x+2}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\int_{-1}^{0}(x+1)e^x dx\le A\le\int_{-1}^{0}\dfrac{e^x}{e^x+2}dx$

Donc $\dfrac{e^{-1}}{3}\le A\le\ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$ ou encore $\boxed{\dfrac{1}{3e}\le A\le\ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)}$

Exercice 2

1) $f(0)=0$ et $f'(0)=\dfrac{30}{10}=3.$

b) f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ donc pour tout réel x, $f'(x) = af(x) + b$, en particulier pour $x = 0$ on a : $f'(0) = af(0) + b$ donc $3 = a \times 0 + b$

Alors $\boxed{b = 3}$.

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(x) + b \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a}(f'(x) - b) = \frac{1}{a}(f'(x) - 3)$.

b) $S = \int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^{10}(f'(x) - 3)dx = \frac{1}{a}\left[f(x) - 3x\right]_0^{10} = \frac{1}{a}(f(10) - 30)$

$= \frac{1}{a}(30 - 30e^{-1} - 30)$ donc $\boxed{S = \frac{-30e^{-1}}{a}}$

c) $S = \frac{-30e^{-1}}{a} = 300e^{-1} \Leftrightarrow a = \frac{-30e^{-1}}{300e^{-1}} = \frac{-1}{10}$ donc $\boxed{a = -0,1}$.

3) f est solution de l'équation différentielle $y' = -0,1y + 3$ vérifiant $f(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(0 + \frac{3}{-0,1}\right)e^{-0,1(x-0)} - \frac{3}{-0,1} \Rightarrow \boxed{f(x) = 30 - 30e^{-0,1x}}$

4) a) $\theta(20) = 30 - 30e^{-0,1\times 20} = 30 - 30e^{-2} \simeq \boxed{25,94\ °C}$

b) $\theta(t) \geq 29 \Leftrightarrow 30 - 30e^{-0,1t} \geq 29 \Leftrightarrow 30e^{-0,1t} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-0,1t} \leq \frac{1}{30}$

$\Leftrightarrow -0,1t \leq -\ln(30) \Leftrightarrow t \geq \frac{-\ln(30)}{-0,1} = 10\ln(30)$ donc $\boxed{t_0 = 10\ln(30) \simeq 34mn}$.

c) $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 30 - 30e^{-0,1t} = 30}$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0$.

La température du corps vient de se stabiliser et prend finalement la tempérture ambiante constante du milieu qui vaut 30°C.

Exercice 3

1) a) $p(O \cap D) = p(O) \times p(D/O) = \frac{50}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{100} = 0,01$.

b) $p(\overline{O} \cap D) = p(\overline{O}) \times p(D/\overline{O}) = \frac{50}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$.

c) D'après la formule des probabilités totales $p(D) = p(O \cap D) + p(\overline{O} \cap D) = 0,11$.

Donc $p = p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,11 = 0,89$.

2) a) On sait que $p(X \geq 8) = 0,3 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -8\lambda = \ln(0,3) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,3)}{-8} \simeq \boxed{0,15}$

b) $p(X \leq 1,5) = 1 - e^{-1,5\lambda} = 1 - e^{-1,5\times 0,15} = 1 - e^{-0,225} \simeq \boxed{0,2}$.

c) $p((X \geq 10)/(X \geq 5)) = \frac{p((X \geq 10) \cap (X \geq 5))}{p(X \geq 5)} = \frac{p(X \geq 10)}{p(X \geq 5)}$

$= \frac{e^{-10\times 0,15}}{e^{-5\times 0,15}} = e^{-5\times 0,15} = e^{-0,75} \simeq \boxed{0,47.}$

3) a) On désigne par Y la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de pièce ayant une durée de vie superieure à 8 ans

Y suit une loi binomiale de paramètres 10 et $p(X \geq 8) = 0,3$.

La probabilité demandée est égale à : $p(Y \geq 1) = 1 - p(\overline{Y \geq 1}) = 1 - p(Y < 1)$

Donc $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - 0,3)^{10} = 1 - 0,7^{10} \simeq \boxed{0,9717}$

b) $p(Y \geq 1) \geq 0,998 \Leftrightarrow 1-0,7^n \geq 0,998 \Leftrightarrow 0,7^n \leq 0,002 \Leftrightarrow n\ln(0,7) \leq \ln(0,002)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,7)} \simeq 17,4$ donc le nombre minimal qu'il doit commander est égal à 18.

Exercice 4

1)

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$	6,29	6,58	6,90	7,2	7,5	7,8	8,1

2) a) le coéfficient de corrélation $r = \frac{cov(X,Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)} \approx 0,999956.$

$|r| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Z et par suite l'ajustement affine entre X et Z est justifié.

b) La droite D de regression linéaire de Z en X admet pour équation $z = ax + b$

avec $a = \frac{cov(X,Z)}{V(X)} = 0,30$ et $b = \overline{Z} - a\overline{X} = 7,19 - 0,30 \times 4 = 5,99$

Donc $\boxed{D : z = 0,3x + 5,99}$.

c) Comme $z = \ln y$ alors $\ln y = 0,3x + 5,99 \Leftrightarrow y = e^{0,3x+5,99} = e^{5,99} \times e^{0,3x} = 399,41e^{0,3x}$

Donc $\boxed{y = \alpha e^{\beta x} \text{ où } \alpha = 399,41 \text{ et } \beta = 0,3}$

3) a) $y = 399,41e^{0,3\times 10} = 399,41e^3 \approx 8022,36$

On peut estimer le nombre de consultations hebdomadaire concernant cette grippe pendant la dixième semaine à 8022 consultations.

b) Soit n le numéro de la semaine pendant laquelle le nombre de consultations dépasse le quart de la population.

$y = 399,41e^{0,3n} \geq \frac{50000}{4} = 12500 \Leftrightarrow e^{0,3n} \geq \frac{12500}{399,41} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{0,3}\ln\left(\frac{12500}{399,41}\right) \approx 11,48$

Donc on estime que le nombre de consultation dépasse le quart de la population pendant le 12ème semaine.

Élaboration de l'énoncé du sujet par Mr Bellili Mongi
Élaboration de la correction par Mr Dhaouadi Nejib

sigmaths.net