Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

◉○◉○◉

4ème Sc. expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (8,5 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,e]$ par :

$f(0)=0$ et $f(x)=x^2\sqrt{1-\ln x}$ pour $x\neq e$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) *Monter que f est continue à droite en 0.*

2) *Etudier la dérivabilité de f à droite en 0*

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) *Vérifier que pour tout réel $x\in\left]0,e\right[$ on a :* $\dfrac{f(x)}{x-e}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\times\dfrac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1}$.

b) *Etudier alors la dérivabilité de f à gauche en e.*

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) *Montrer que f est dérivable sur $\left]0,e\right[$ et $\forall x\in\left]0,e\right[$; $f'(x)=\dfrac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$.*

b) *Drésser le tableau de variation de f.*

c) *Tracer la courbe $\mathscr{C}$.*

5) *Soit α un réel de l'intervalle $\left]0,e\right[$.*

On se propose de déterminer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

a) *Montrer que si g est une fonction continue sur $[0,e]$ alors :*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^e g(x)dx=\int_0^e g(x)dx.$$

b) *A l'aide d'une intégration par partie, calculer en fonction de α, l'intégrale*

$I=\int_\alpha^e x^4\ln x\,dx$ *et vérifier que* $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I=\dfrac{4}{25}e^5$.

c) *Déterminer alors le volume V.*

Exercice 2 (5,5 points)

On pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) *Calculer I_0 et puis, à l'aide d'une integration par parties, calculer I_1.*

2) *Montrer, à l'aide d'une integration par parties, que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$.*

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En utilisant 2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

Exercice 3 (6 points)

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraine sur un site internet.

40% des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30% de niveau moyen et 30% de niveau difficile.

Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95% des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60% des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40% des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements :

F : «la grille est de niveau facile», M : «la grille est de niveau moyen»,

D : «la grille est de niveau difficile» et R : «Pierre réussit la grille».

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.

b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.

c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.

3) Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?

4) Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : «Je pense que la grille était facile».

Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sqrt{1-\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^4(1-\ln x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^4 - x^4\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^4\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\sqrt{1-\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{1-\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2 - x^2\ln x} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et sa courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse 0, une demi-tangente horizontale (c-à-d de coefficient directeur $f_g'(0)=0$)

3) a) Pour tout réel $x \in]0,e[$; on a :

$$\frac{f(x)}{x-e} = \frac{x^2\sqrt{1-\ln x}}{x-e} = \frac{x^2(1-\ln x)}{(x-e)\sqrt{1-\ln x}} = \frac{x^2(\ln e - \ln x)}{x\left(1-\frac{e}{x}\right)\sqrt{1-\ln x}} = \frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\cdot\frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1}$$

b) $0 < x < e \Leftrightarrow \dfrac{e}{x} < 1$ donc si $x \to e^-$ alors $\dfrac{e}{x} \to 1^-$

$$\lim_{x\to e^-} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{x\to e^-} \frac{f(x)}{x-e} = \lim_{x\to e^-} \frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\cdot\frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1} = \lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{\ln X}{X-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to e^-} \dfrac{-x}{\sqrt{1-\ln x}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en e et sa courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse e, une demi-tangente verticale.

4) a) La fonction $x \mapsto 1-\ln x$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0,e[$

Donc f est dérivable sur $]0,e[$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0,e[\ ;\ f'(x) = 2x\sqrt{1-\ln x} + x^2\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}} = 2x\sqrt{1-\ln x} - \frac{x}{2\sqrt{1-\ln x}}$$
$$= \frac{4x(1-\ln x)-x}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{4x-4x\ln x - x}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{3x-4x\ln x}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}.$$

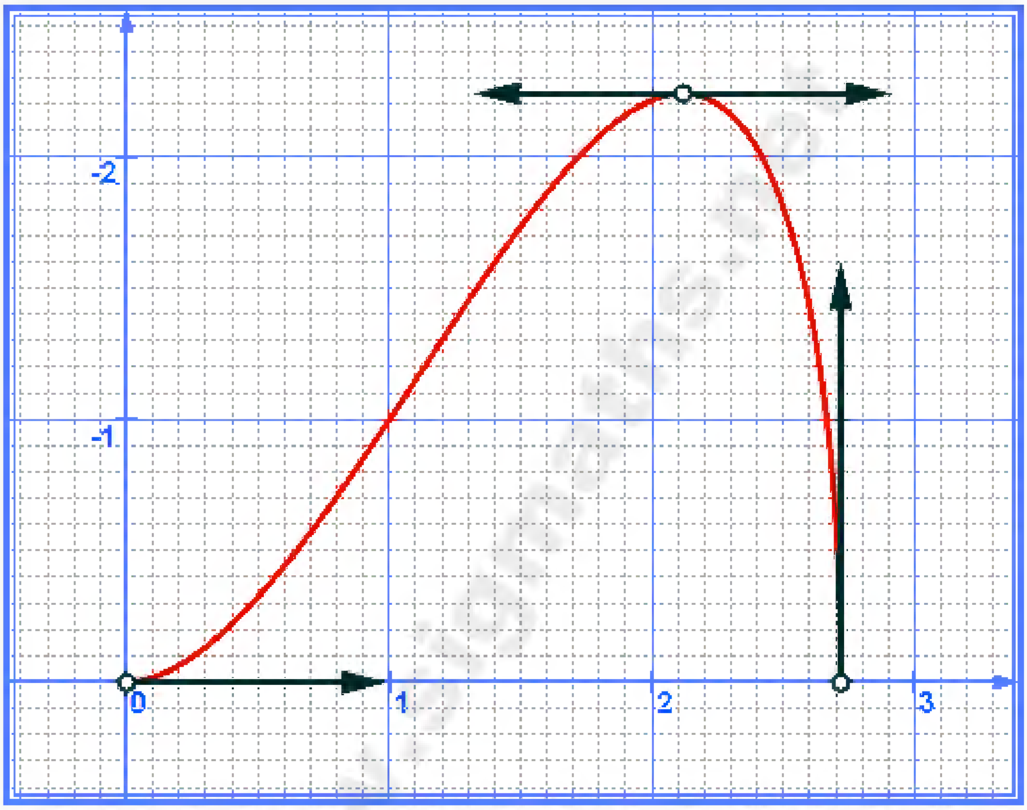
b) $f'(x)=0$ et $x \in]0,e[\Leftrightarrow 3-4\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}} \simeq 2,12$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3-4\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{3}{4}}$.

D'où le tableau de variation de f.

x	0		$e^{\frac{3}{4}}$		e
$f'(x)$	0		0		$\parallel$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e\sqrt{e}}{2}$	$\searrow$	0

c)



$5)$ *a)* g est continue sur $[0,e]$ donc g admet des primitives sur cet intervalle

Soit G une primitive de g sur l'intervalle $[0,e]$.

G est dérivable donc continue sur $[0,e]$ et par suite continue à droite en 0

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0)$

D'où $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^e g(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} [G(x)]_\alpha^e = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} G(e) - G(\alpha) = G(e) - G(0) = \int_0^e g(x)dx.$

b) Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^4 \Leftarrow v(x) = \dfrac{1}{5}x^5. \end{cases}$

$$\text{Donc } I = \int_\alpha^e x^4 \ln x\, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \ln x\right]_\alpha^e - \frac{1}{5}\int_\alpha^e x^4 dx = \frac{e^5}{5} - \frac{\alpha^5 \ln\alpha}{5} - \frac{1}{25}\left[x^5\right]_\alpha^e$$

$$= \frac{e^5}{5} - \frac{\alpha^5 \ln\alpha}{5} - \frac{1}{25}\left(e^5 - \alpha^5\right) = \boxed{\frac{4e^5}{25} - \frac{\alpha^5 \ln\alpha}{5} + \frac{\alpha^5}{25}}$$

$$\lim_{\alpha\to0^+} -\frac{\alpha^5\ln\alpha}{5}+\frac{\alpha^5}{25}=0 \text{ car } \lim_{\alpha\to0^+}\alpha^5\ln\alpha=0 \text{ donc } \boxed{\lim_{\alpha\to0^+} I=\frac{4e^5}{25}}$$

$$c)\ V=\int_0^e \pi\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_0^e\left(f(x)\right)^2dx=\pi\times\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^e\left(f(x)\right)^2dx=\pi\times\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^e x^4(1-\ln x)dx$$

$$=\pi\times\lim_{\alpha\to0^+}\left(\int_\alpha^e x^4dx-\int_\alpha^e x^4\ln x\,dx\right)=\pi\times\lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{e^5}{5}-\frac{\alpha^5}{5}-I\right)=\pi\left(\frac{e^5}{5}-\frac{4e^5}{25}\right)=\frac{\pi e^5}{25}$$

Exercice 2

$$1)\ I_0=\int_1^e xdx=\left[\tfrac12x^2\right]_1^e=\boxed{\tfrac12\left(e^2-1\right)}.$$

$$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx.\ \text{ on pose }\begin{cases}u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac1x\\ v'(x)=x\Leftarrow v(x)=\frac12x^2\end{cases}$$

$$\text{Donc } I_1=\left[\tfrac12x^2\ln x\right]_1^e-\tfrac12\int_1^e xdx=\tfrac12e^2-\tfrac12\left[\tfrac12x^2\right]_1^e=\tfrac14\left(2e^2-e^2+1\right)=\boxed{\tfrac14\left(e^2+1\right)}.$$

$$2)\ \forall n\in\mathbb{N};\ I_{n+1}=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx.\quad \text{On pose }\begin{cases}u(x)=(\ln x)^{n+1}\Rightarrow u'(x)=(n+1)\frac1x(\ln x)^n\\ v'(x)=x\Leftarrow v(x)=\frac12x^2\end{cases}$$

$$\text{Donc } I_{n+1}=\left[\tfrac12x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-\tfrac12(n+1)\int_1^e x(\ln x)^ndx=\tfrac12e^2-\tfrac12(n+1)I_n$$

$$\text{D'où } \boxed{2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2}.$$

$$3)\ I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx-\int_1^e x(\ln x)^ndx=\int_1^e x\left[(\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\right]dx$$

$$=\int_1^e x(\ln x)^n(\ln x-1)dx$$

Or $\forall x\in[1,e]$ on a : $0\le\ln x\le1$ donc $x(\ln x)^n\ge0$ et $1-\ln x\le0$

$\forall x\in[1,e];\ x(\ln x)^n(\ln x-1)\le0\Rightarrow\int_1^e x(\ln x)^n(\ln x-1)dx\le0\Rightarrow I_{n+1}-I_n\le0$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

4) a) D'après 2) on a : $(n+1)I_n=e^2-2I_{n+1}\le e^2$ car $I_{n+1}\ge0$ donc $I_n\le\dfrac{e^2}{n+1}$.

$(n+3)I_n=(n+1)I_n+2I_n\ge(n+1)I_n+2I_{n+1}$ car (I_n) est décroissante.

Or $(n+1)I_n+2I_{n+1}=e^2$ donc $(n+3)I_n\ge e^2$ ou encore $I_n\ge\dfrac{e^2}{n+3}$.

D'où $\forall n\in\mathbb{N};\ \dfrac{e^2}{n+3}\le I_n\le\dfrac{e^2}{n+1}$

$$b)\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N};\ \dfrac{e^2}{n+3}\le I_n\le\dfrac{e^2}{n+1}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^2}{n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^2}{n+1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$$

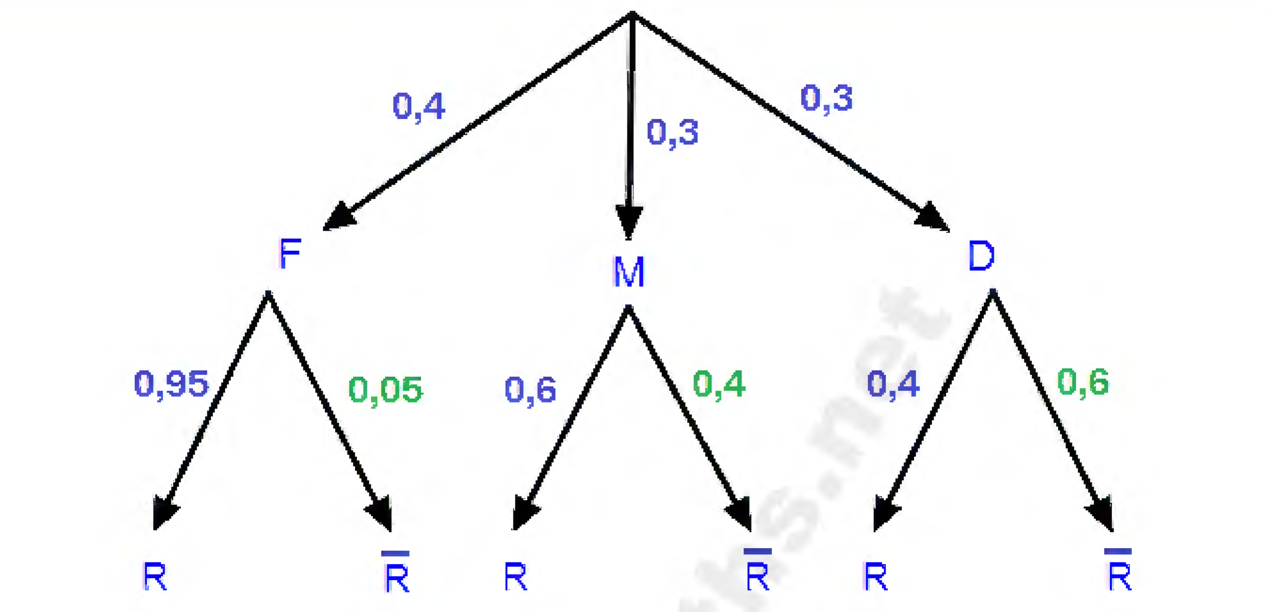
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^2}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^2}{1+\frac3n}=e^2$$

$$\text{et }\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^2}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^2}{1+\frac1n}=e^2$$

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N};\ \dfrac{ne^2}{n+3}\le nI_n\le\dfrac{ne^2}{n+1}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^2}{n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^2}{n+1}=e^2\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}nI_n=e^2.$$

Exercice 3

1)



2) a) $p(D\cap R) = p(D)\times p(R/D) = 0,3\times 0,4 = 0,12.$

b) $p(F\cap \overline{R}) = p(F)\times p(\overline{R}/F) = 0,4\times 0,05 = 0,02.$

c) $p(R) = p(R\cap F) + p(R\cap M) + p(R\cap D)$

$= p(F)\times p(R/F) + p(M)\times p(R/M) + p(D)\times p(R/D)$

$= 0,4\times 0,95 + 0,3\times 0,6 + 0,3\times 0,4$

$= 0,38 + 0,18 + 0,12 = 0,68.$

3) $p(M/\overline{R}) = \dfrac{p(M\cap\overline{R})}{p(\overline{R})} = \dfrac{p(M)\times p(\overline{R}/M)}{1-p(R)} = \dfrac{0,3\times 0,4}{0,32} = \dfrac{0,12}{0,32} = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8} = 0,375.$

4) $p(F/R) = \dfrac{p(R\cap F)}{p(R)} = \dfrac{p(F)\times p(R/F)}{p(R)} = \dfrac{0,4\times 0,95}{0,68} = \dfrac{0,38}{0,68} = \dfrac{19}{34} \simeq 0,56.$

Oui, Sa petite sœur a presque raison car $p(F/R) > 0,5$.

On peut dire qu'elle a environ 56% de chances d'avoir raison