Épreuve : Mathématiques **Durée :** 3H	**Devoir de synthèse n°2** ◉○◉○◉ **3ème Maths**	**Professeur :** Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote D.

3) Tracer $\mathscr{C}$ et D. (sur la feuille annexe)

4) Montrer que le point $I(1,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

5) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux tangentes parallèles à la droite Δ d'équation $y=-3x$ et donner une équaton cartésienne pour chacune.

6) a) Tracer, sur la feuille annexe, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction g définie par $g(x)=f(|x|)$.

b) Drésser le tableau de variation de g.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Une urne contient 5 boules blanches numérotées 0,0,1,2,2 et 4 boules noires numérotées 0,1,1,2.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Dénombrer le nombre de tirage possibles.

2) Combien y a t – il de tirages comprenant :

a) Une seule boule blanche?

b) Au moins une boule blanche?

c) Au plus deux boules blanches?

3) De combien de façons peut – on avoir :

a) La somme des numéros est paire?

b) Le produit des numéros est pair?

c) Le produit des numéros est nul?

Partie B

On se propose de calculer la somme S définie par :

$S = C_{30}^{1} + 2C_{30}^{2} + 3C_{30}^{3} + 4C_{30}^{4} + \ldots + 30C_{30}^{30}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)^{30}$.

1) *A l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $f(x)$.*

2) *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, de deux façons, $f'(x)$*

3) *En déduire la valeur de la somme S.*

Exercice 3 (4 points)

On considère l'équation (E) : $\sin(3x) + \sin(2x) = 0$.

1) *Résoudre, dans $\mathbb{R}$ et puis dans $]-\pi, \pi]$, l'équation (E).*

2) a) *Montrer que $\sin(3x) = \left[4\cos^2 x - 1\right]\sin(x)$.*

   b) *Montrer que $\sin(3x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \left[4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1\right]\sin(x) = 0$.*

3) *Parmi les solutions de (E) quelles sont, dans $]-\pi, \pi]$, les solutions de l'équation :*

   $4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$ *dans* $]-\pi, \pi]$.

4) *Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.*

5) *En déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.*

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit O le symétrique de B par rapport à (AC).

1) *Soit r la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et qui transforme A en C.*

   a) *Montrer que O est le centre de la rotation r.*

   b) *On pose $P = r(B)$.*

   Montrer que C est le milieu de $[AP]$.

2) *Soit $M \in [AB]$ et $M' \in [PC]$ tels que $AM = CM'$.*

   Montrer que le triangle OMM' est équilatéral.

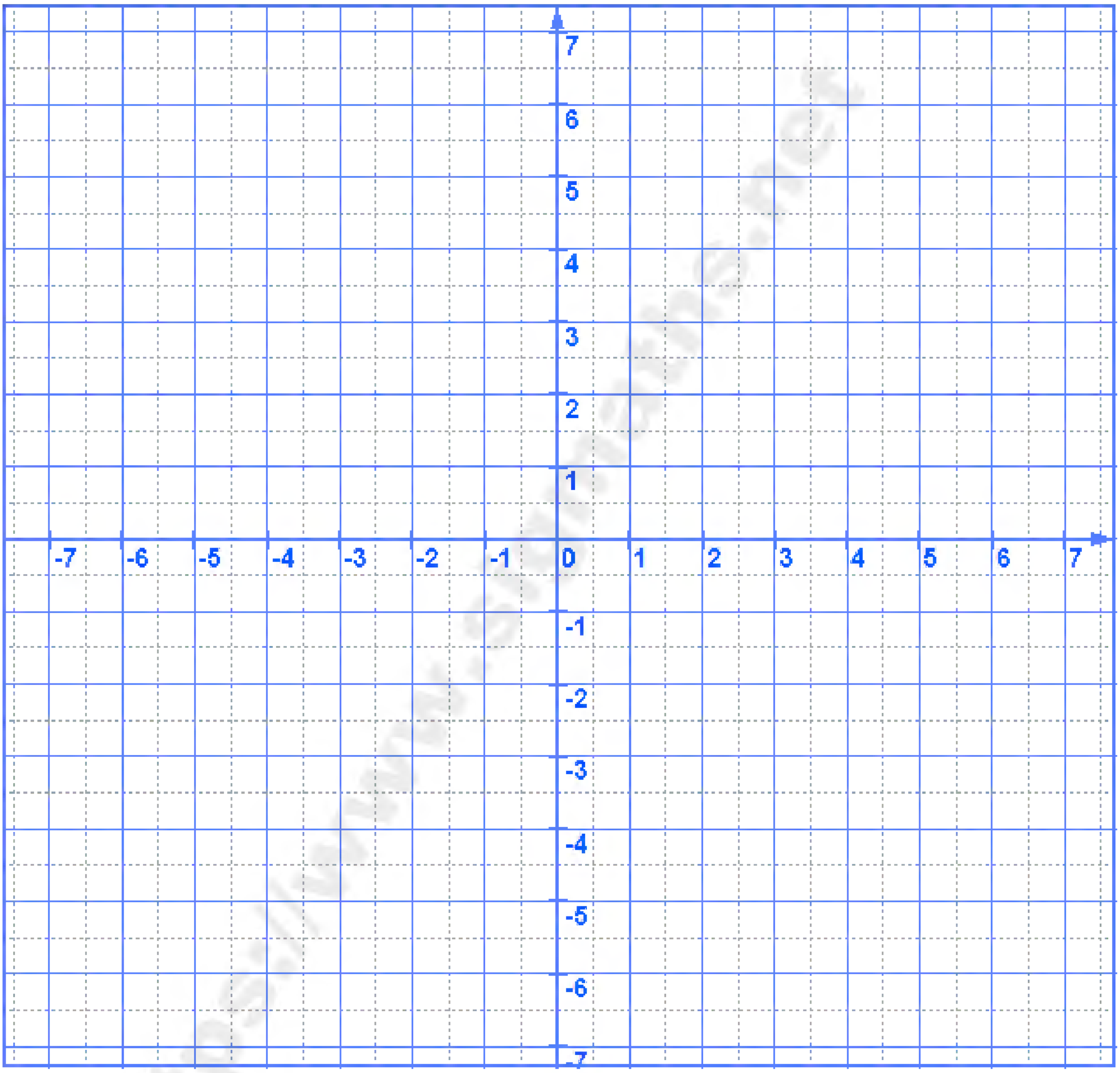
3) *Soit le point I centre de la rotation r' d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme P en B.*

   a) *Montrer que les points O, C et I sont alignés.*

   b) *Construire I.*

Feuille annexe (À rendre avec la copie)

Représentation graphique de f



Représentation graphique de g