

Dénombrement

Créé par Dhaouadi Nejib le 15/01/2019

I- Revenons sur les ensembles

Un ensemble est une collection ou un groupement d'objets distincts ; ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble. Pour traduire qu'un objet x est un élément d'un ensemble noté E , on dit que x appartient à E et on note $x \in E$ et si x n'est pas un élément de E ou encore x n'appartient pas à E on note $x \notin E$.

- ❖ Un ensemble est fini s'il contient un nombre fini d'éléments.
- ❖ Un ensemble E est dit vide s'il ne contient aucun élément on le note \emptyset .
- ❖ Un ensemble E est inclu dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F , on note $E \subset F$ et on dit que E est un **sous-ensemble** de F ou encore E est une **partie** de F .
- ❖ Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

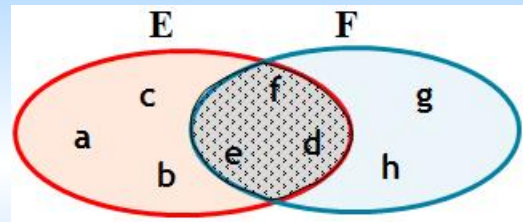
L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F , on le note

$E \cap F$ (lire « E inter F »)

c'est-à-dire que :

$x \in E \cap F$ si et seulement si $x \in E$ et $x \in F$

Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que les ensembles E et F sont disjoints.



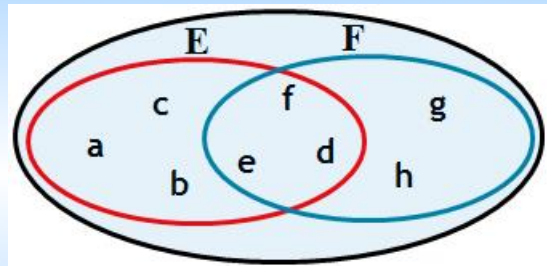
$$E \cap F = \{d, e, f\}$$

La réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F , on le note $E \cup F$

(lire « E union F »)

c'est-à-dire que :

$x \in E \cup F$ si et seulement si $x \in E$ ou $x \in F$



$$E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E .

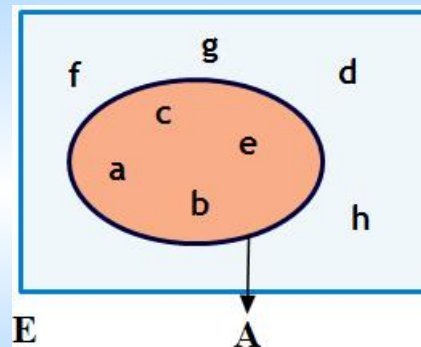
Le complémentaire de A dans E noté C_E^A ou \bar{A} est

l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A . c'est-à-dire que :

$x \in \bar{A}$ si et seulement si $x \in E$ et $x \notin A$

Il est évident que $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ on dit que A et \bar{A} forment une partition de E .

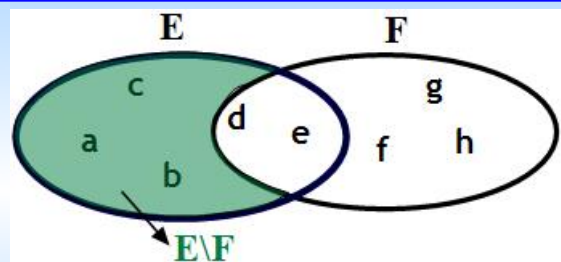
Dans l'exemple ci-contre: $\bar{A} = \{d, f, g, h\}$



La différence ensembliste de E et F notée « $E \setminus F$ » (lire « E moins F ») est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F , autrement dit c'est le

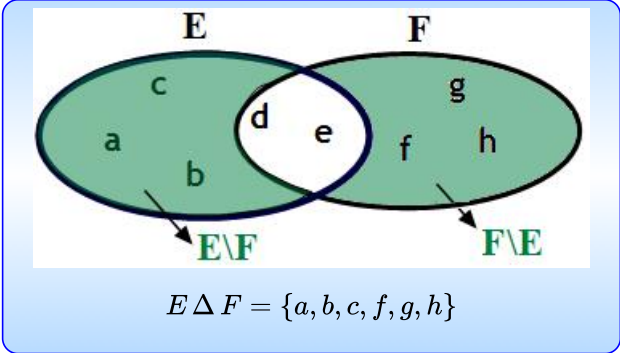
complémentaire de F dans E , soit :

$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}$



$$E \setminus F = \{a, b, c\}$$

La différence symétrique de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou l'autre des deux ensembles et non aux deux.
 Cet ensemble est noté $E \Delta F$ on lit «E delta F»
 ainsi : $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$



Formules de Morgan

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E
 $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

II- Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble fini
 On appelle cardinal de E le nombre des éléments de E.
 Si l'ensemble E contient n éléments, on écrit Card E=n

Propriétés

- E et F sont deux ensembles finis.
- $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$
 - Si E et F sont disjoints ($E \cap F = \emptyset$) on obtient :
 $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$
 - Si A est un sous-ensemble de E et \overline{A} le complémentaire de A dans E alors: $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$
 - $Card(E \setminus F) = Card(E) - Card(E \cap F)$

III-Produit cartésien de deux ensembles finis

Définition

Le produit cartésien (ou ensemble-produit) d'un ensemble E par un ensemble F est l'ensemble des couples dont l'origine est un élément de E et l'extrémité est un élément de F.
 On le note $E \times F$ (on lit «E crois F»)
 $E \times F = \{(x, y) \text{ tq } x \in E \text{ et } y \in F\}$ et on a : $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.

Remarques

Soit E un ensemble non vide.
 On sait que chaque élément du produit cartésien $E \times E$ (noté E^2) est un couple.
 Aussi, chaque élément du produit cartésien $E \times E \times E$ (noté E^3) est un triplet.

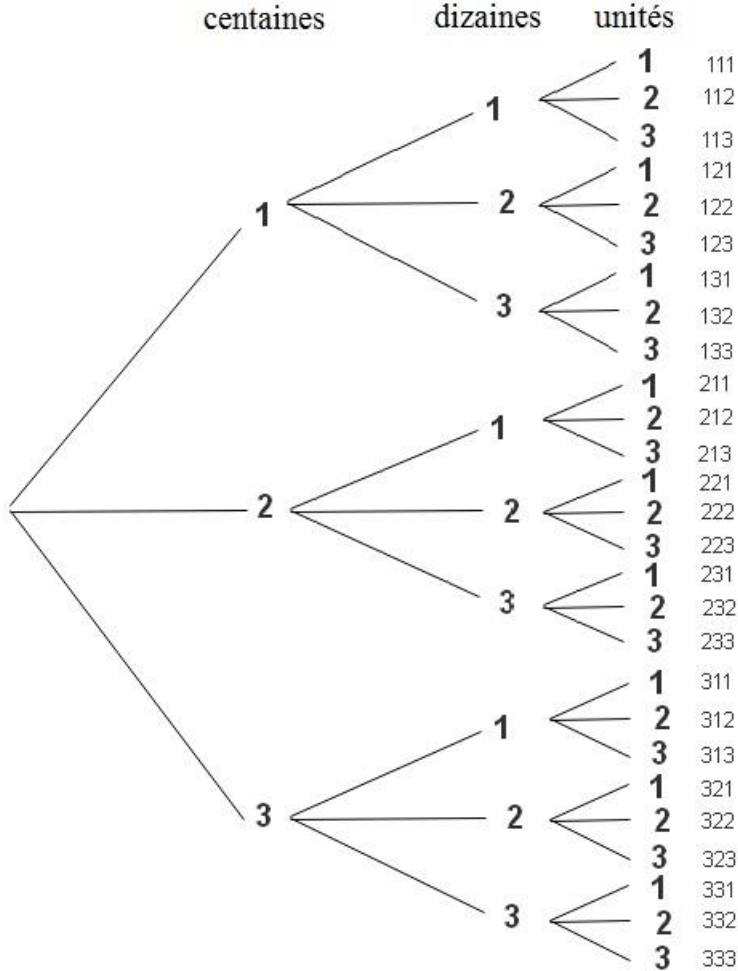
Plus généralement, p étant un entier supérieur ou égal à 2. Chaque élément du produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ (noté E^p) est appelé un p -uplet

Et on a : $\text{card}(E^2) = (\text{card}(E))^2$; $\text{card}(E^3) = (\text{card}(E))^3$ et plus généralement $\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p$ où p est un entier ≥ 2

Exemple

On se propose de déterminer le nombre des entiers naturels de trois chiffres qu'on peut former à l'aide des chiffres 1, 2 et 3.

Pour accomplir cette tâche, il est légitime de s'aider d'un diagramme qui nous facilite la tâche. Remarquer le diagramme suivant:



D'après le diagramme ainsi construit (appelé arbre de choix), il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ entiers obtenus.

Pour former un entier naturel de 3 chiffres, on commence par choisir le chiffre des centaines parmi les 3 choix possibles 1, 2 ou 3 et de même pour le chiffre des dizaines et le chiffre des unités ce qui revient à former un triplet dont les composants sont 1, 2 ou 3.

Donc un tel entier naturel est un élément du produit cartésien $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}^3$ dont le cardinal égal à $3^3 = 27$.

Exercice 1

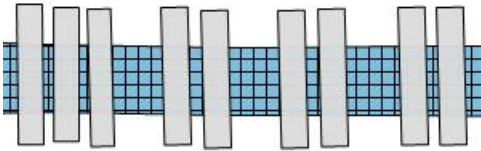
En informatique un "bit" (binary digit) vaut soit 0 soit 1, un "octet" est une succession de huit bits (exemple : 00011001).

1. Combien existe-t-il d'octets possibles ?
2. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 1 ?
3. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 0 ?
4. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 00 ?

Montrer les solutions

Exercice 2

Ville A



Ville B

Déterminer le nombre de chemins possibles permettant d'aller de la ville A vers la ville B et de retourner de A vers B sans passer par le même pont.

Montrer les solutions

Exercice 3

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Cliquer ici pour montrer les solutions

Exercice 4

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Cliquer ici pour montrer les solutions

IV-Les Permutations

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal n.

On appelle permutation des éléments de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

Une permutation de E est assimilée à une numérotation des n éléments de E de 1 jusqu'à n qu'on peut mettre en évidence simplement en écrivant ces éléments suivant l'ordre de cette numérotation.

Le nombre des permutations de E est égal à: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Notation

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n et on note n!, l'entier $1 \times 2 \times \dots \times n$. Par suite, le nombre des permutations des n éléments de E est égal à n!.

On convient que $0! = 1$.

Exercice 5

1. Calculer $4!$; $5!$; $6!$; $7!$; $8!$.

2. Calculer $\frac{8!}{4!}$, $\frac{12!}{14!}$, $\frac{120!}{119!}$ et $\frac{100!}{97!}$

3. Montrer que $2 \times 4 \times \dots \times 200 = 2^{100} 100!$

4. Montrer que $\frac{2 \times 4 \times \dots \times 2000}{3 \times 5 \times \dots \times 2001} = \frac{(2^{1000} \times 1000!)^2}{2001!}$

Cliquer ici pour montrer les solutions

Exercice 6

1. On appelle anagramme du mot MATH tout mot (ayant un sens ou non) formé des quatre lettres M, A, T et H.
Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot LOGIQUE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot TUNISIE ?
4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BACCALAUREAT ?

[Cliquer ici pour montrer les solutions](#)

V. Arrangement

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p -uplet d'éléments distincts de E .

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est l'entier noté A_n^p (on lit «A, n, p»), tel que

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$$

On convient que $A_n^0 = 1$

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$

Un arrangement de trois éléments de E est un triplet d'éléments distincts de E .

On peut citer, par exemple: (a,b,c), (a,b,d), (d,a,c), (d,a,b), (d,b,a) etc ...

Le nombre des triplets possibles est égal à $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Exercice 7

On considère une course à laquelle participent dix athlètes.

Combien existe-t-il d'ordres d'arrivées possibles des trois premiers (sans ex-æquo)?

[Cliquer ici pour montrer les solutions](#)

Exercice 8

A l'aide des chiffres de 1 à 7

1. Combien peut-on former de nombre de quatre chiffres?
2. Combien peut-on former de nombre de quatre chiffres distincts?
3. Reprendre les deux questions précédentes à l'aide des chiffres de 0 à 7.

[Cliquer ici pour montrer les solutions](#)

VI. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E , toute partie de p éléments distincts de E .

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $0 \leq p \leq n$.

Pour former tous les arrangements de p éléments de E , on applique à chaque partie de p éléments de E toutes les $p!$ permutations possibles, ce qui permet de dire que $A_n^p = p!C_n^p$ ou encore:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

- ❖ L'ensemble vide \emptyset qui contient 0 élément, admet une seule partie de 0 élément qui est \emptyset (lui même) donc $C_0^0 = 1$
- ❖ L'ensemble vide \emptyset est toujours la seule partie de n'importe quel ensemble de n éléments, qui contient 0 élément donc $C_n^0 = 1$
- ❖ A l'aide des n éléments d'un ensemble ($n \geq 1$), on peut former exactement n parties contenant chacune un seul élément (appelées des singletons) donc $C_n^1 = n$
- ❖ Dans un ensemble E de n éléments ($n \geq 1$), le choix d'un singleton correspond exactement au choix d'une partie de $n-1$ éléments (Les éléments de E autre que l'élément du singleton) donc $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$
- ❖ Soit E un ensemble de cardinal n et p tel que $0 \leq p \leq n$. Choisir une partie à p éléments de E revient à choisir une partie à $n-p$ éléments. donc $C_n^p = C_n^{n-p}$
- ❖ Il y a deux façons de choisir p éléments parmi n éléments
 - soit on prend un élément bien précis désigné à l'avance et il reste $p-1$ éléments parmi $n-1$ éléments, ce qui fait C_{n-1}^{p-1} possibilités
 - soit on ne prend pas cet élément et il faut choisir p éléments parmi $n-1$ éléments, ce qui fait C_{n-1}^p possibilités.
 D'où l'égalité :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Exercice 9

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent une seule boule blanche ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux boules blanches ?
4. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent trois boules blanches ?
5. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent quatre boules blanches ?
6. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins une boule blanche ?

[Cliquez ici pour montrer les solutions](#)

Exercice 10

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

1. De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
2. Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
 - a) uniquement des hommes.
 - b) des personnes de même sexe.
 - c) au moins une femme et au moins un homme.

[Cliquez ici pour montrer les solutions](#)

VII. Triangle de Pascal et binôme de Newton

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \\
 & & & & & & C_0^0 \\
 & & & & & C_1^0 & C_1^1 \\
 & & & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
 & & & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
 & & \vdots & & & & \ddots \\
 & C_{n-1}^0 & \dots & C_{n-1}^{p-1} & C_{n-1}^p & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\
 & C_n^0 & \dots & C_n^p & & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n
 \end{array}$$

Et d'après la dernière propriété plus haut, le triangle de pascal devient très simple à établir.

$$\begin{array}{l}
 n = 0 \rightarrow 1 \\
 n = 1 \rightarrow 1 \quad 1 \\
 n = 2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1 \\
 n = 3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 n = 4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 n = 5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 n = 6 \rightarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
 n = 7 \rightarrow 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
 \vdots \quad \dots \quad \ddots
 \end{array}$$

Binôme de Newton

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p \\
 &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n
 \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\
 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
 \end{aligned}$$

Nombre de parties d'un ensemble fini.

Dans la formule du binôme, pour $a=1$ et $b=1$ on obtient:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

Chacun des nombres C_n^p représente le nombre de parties de p éléments d'un ensemble de n éléments ($0 \leq p \leq n$)

D'où le théorème suivant:

Théorème

Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est égal à 2^n

VIII. Autres exercices

Exercice 1

A l'aide des chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, combien peut-on écrire:

1. de nombres de trois chiffres?
2. de nombres de trois chiffres distincts?
3. de nombres de six chiffres?
4. de nombres de six chiffres distincts?

Exercice 2

Un sac contient cinq jetons blancs et quatre jetons noirs.

On prend simultanément trois jetons du sac.

De combien de façons peut-on ainsi extraire:

1. Un jeton noir et un seulement?
2. Un jeton blanc et un seulement?
3. Trois jetons noirs?
4. Aucun jeton noir?
5. Au moins deux jetons blancs?
6. Au plus deux jetons blancs?

Exercice 3

Trois dés de couleurs différentes ont des faces numérotées de 1 à 6.

On jette ces trois dés et on observe les nombres inscrits sur les faces supérieures.

1. Dénombrer tous les résultats possibles.
2. Dénombrer les résultats comportant un seul 3.
3. Dénombrer les résultats comportant exactement deux 4.
4. Dénombrer les résultats ne comportant aucune 5.

Exercice 4

Une assemblée de dix hommes et huit femmes désirent élire un comité de cinq membres.

Madame A et Monsieur B ne peuvent pas faire partie d'un même comité.

1. Quel est le nombre de comités dont Madame A ferait partie?
2. Quel est, dans les conditions précisées par les énoncés, le nombre de comités qui pourraient être constitués?

Exercice 5

1. De combien de façons peut-on placer 5 boules de couleurs différentes dans 5 boîtes alignées? (on place une boule dans chaque boîte)
2. De combien de façons peut-on placer 5 boules à choisir parmi 12 boules de couleurs différentes, dans 5 boîtes alignées?
3. De combien de façons peut-on placer 5 boules à choisir parmi 7 boules blanches et 10 boules noires, dans 5 boîtes alignées?
4. De combien de façons peut-on placer 7 boules blanches et 10 boules noires dans 20 boîtes alignées?

Exercice 6

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.

1. Dénombrer le nombre de façons où les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?
2. Dénombrer le nombre de façons où les deux amis soient distants de p places (i.e. séparés par $p - 1$ personnes) ?

[Cliquer ici pour montrer les solutions](#)