Épreuve : Mathématiques
Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

◉○◉○◉

4ème Sc.Expérimentales 2

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x} + 1 - \pi & si\ x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x & si\ x \geq 0. \end{cases}$

1) *Etudier la continuité de* f *en* 0.

2) *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

3) a) *A l'aide d'un encadrement de* $f(x)$ *pour* $x < 0$, *déterminer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution* $\alpha \in \left]-1, 0\right[$.

4) *Soit h la fonction définie sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *par :* $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ *si* $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ *et* $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Montrer que h est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Soit la suite réelle (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1) a) *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3.

b) *Vérifier que pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$. (*)

c) *En déduire que pour tout entier naturel n,* $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) *Montrer que* (u_n) *est décroissante.*

e) *En déduire que* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

2) a) *En utilisant l'égalité (*), montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$.

b) *En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,* $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^{2^n}$.

c) Recopier et compléter :

u_2 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ...... près.

u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ...... près.

Exercice 3

On pose $z = i + e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

1) a) Vérifier que pour tous réels a et b on a : $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$.

b) En déduire que $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) Dans cette question on pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z sous forme algébrique et puis vérifier que $|z| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

b) Vérifier que $2+\sqrt{3} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}$ et déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On donne les points A, B et M d'affixe respectives $-i$, 1 et $e^{i\theta}$.

a) Ecrire $\frac{Aff(\overrightarrow{AM})}{Aff(\overrightarrow{AB})}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

CORRECTION DU DEVOIR

Correction de l'exercice I

1) On a $f(0)=\sqrt{0^2+0+1}-0=1$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(\pi x)}{x}+1-\pi=\lim\limits_{x\to 0^-}\pi\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}+1-\pi=\pi\times 1+1-\pi=1=f(0)$

Donc $\boxed{f \text{ est continue à gauche en } 0}$. (1)

La fonction $x\mapsto x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ est continue (fonction polynome) et positive sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et par suite f est continue sur cet intervalle $\Rightarrow \boxed{f \text{ continue à droite en } 0}$. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}\quad(\text{car } x>0)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

3) a) Soit $x<0$, $-1\le\sin(\pi x)\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\le-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+1-\pi\le f(x)\le-\dfrac{1}{x}+1-\pi.$

En plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1-\pi\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1-\pi\right)=1-\pi$

Donc d'après le théorème des limites et ordre $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1-\pi.}$

b) $\begin{cases} f \text{ continue sur } [-1,0] \\ f(-1)\times f(0)=(1-\pi)\times 1=1-\pi<0\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet au moins une}\\ \text{solution } \alpha \text{ dans l'intervalle }]-1,0[.\end{array}\right.$

4) ❖ La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

et $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $\cos x\neq 0$ donc la fonction $g: x\mapsto\dfrac{1}{\cos x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

❖ $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $0<\cos x\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\cos x}\ge 1\Leftrightarrow g(x)\in[1,+\infty[\subset[0,+\infty[$

$$Ainsi\ on\ a\ \begin{cases} g\ continue\ sur\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f\ continue\ sur\ [0,+\infty[\\ g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\subset[0,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \boxed{h=fog\ est\ continue\ sur\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right[}\quad (3)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} fog(x)=\frac{1}{2}=h\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \boxed{h\ continue\ à\ gauche\ en\ \frac{\pi}{2}}\quad (4) \end{array}\right.$$

$$(3)\ et\ (4)\Rightarrow \boxed{h\ est\ continue\ sur\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$$

Correction de l'exercice 2

$$1)\ a)\ u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{2}{u_0}\right)=\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}.\qquad u_2=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{2}{u_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3/2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}.$$

$$u_3=\frac{1}{2}\left(u_2+\frac{2}{u_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{17/12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)=\frac{577}{408}.$$

$$b)\ u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=\frac{u_n^2+2}{2u_n}-\sqrt{2}=\frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n}$$

$$=\frac{u_n^2-2\sqrt{2}u_n+\left(\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}.$$

c) ❖ Pour $n=0$, $u_0=2\geq\sqrt{2}$ donc l'inégalité est vraie.

❖ Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n\geq\sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1}\geq\sqrt{2}$.

$$u_n\geq\sqrt{2}\Rightarrow u_n>0\Rightarrow u_{n+1}-\sqrt{2}==\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\geq 0\Rightarrow u_{n+1}\geq\sqrt{2}.$$

❖ Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq\sqrt{2}$.

$$d)\ u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2+2}{2u_n}-u_n=\frac{u_n^2+2-2u_n^2}{2u_n}=\frac{2-u_n^2}{2u_n}=\frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2u_n}\leq 0\ car\ u_n\geq\sqrt{2}.$$

e) (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) donc (u_n) est convergente.

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)\ avec\ f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right). \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[. \\ f\ continue\ sur\ \left[\sqrt{2},+\infty\right[\subset\left]0,+\infty\right[. \end{cases}\Rightarrow f(L)=L$$

$$f(L)=L \Leftrightarrow L+\frac{2}{L}=2L \Leftrightarrow L^2+2=2L^2 \Leftrightarrow L^2=2 \Leftrightarrow L=\sqrt{2} \text{ car } L\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[$$

$$2)\ a)\ \text{On a } u_n \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2u_n \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0<\frac{1}{2u_n}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 0\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ce qui donne } 0\leq u_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}} \text{ ou encore } \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}.$$

$$b)\ ❖\ \text{Pour } n=0,\begin{cases}\left|u_0-\sqrt{2}\right|=\left|2-\sqrt{2}\right|=2-\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^0}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)=2-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\left|u_0-\sqrt{2}\right|\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^0}$$

$$❖\ \text{Soit } n\in\mathbb{N},\ \text{supposons que } \left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}$$

$$\text{et montrons que } \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

$$\text{On a } \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}\leq\frac{\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}\right)^2}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^{n+1}}.$$

$$c)\ 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^2}\approx 0{,}005\leq 0{,}01 \text{ et } 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^3}\approx 0{,}95\times 10^{-5}\leq 10^{-5}$$

$$\text{Donc } \left|u_2-\sqrt{2}\right|\leq 10^{-2}\Rightarrow u_2=\frac{17}{12} \text{ est une valeur approchée de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$\text{et } \left|u_3-\sqrt{2}\right|\leq 10^{-5}\Rightarrow u_3=\frac{577}{408} \text{ est une valeur approchée de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-5} \text{ près}.$$

Vérification à l'aide d'une calculatrice :

$\frac{17}{12}=\boxed{1{,}41}6666666...$ $\quad\sqrt{2}=\boxed{1{,}41}4213562...$

$\frac{577}{408}=\boxed{1{,}41421}568...$ $\quad\sqrt{2}=\boxed{1{,}41421}3562...$

Correction de l'exercice 3

$$z=i+e^{i\theta} \text{ avec } \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[.$$

$$1)\ a)\ e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)=e^{i\left(\frac{a+b+a-b}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{a+b-a+b}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{2a}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{2b}{2}\right)}=e^{ia}+e^{ib}.$$

$$b)\ z = i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{2}} + e^{-i\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \quad car \quad e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

$$2)\ a)\ Pour\ \ \theta = \frac{\pi}{3},\ z = i + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = i + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4+4\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

$$b)\ \ 2+\sqrt{3} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}.$$

$$D'après\ 1)b)\ z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

$$Or\ \frac{\pi}{12} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0\ donc\ |z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}}$$

$$Alors\ \ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$3)\ a)\ \frac{Aff(\overrightarrow{AM})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{e^{i\theta}+i}{1+i} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -\frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

$$Donc\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ est\ la\ forme\ exponentielle\ de\ \frac{Aff(\overrightarrow{AM})}{Aff(\overrightarrow{AB})}.$$

$$b)\ \overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AB}\ sont\ orthogonaux \Leftrightarrow \frac{Aff(\overrightarrow{AM})}{Aff(\overrightarrow{AB})}\ est\ imaginaire \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ avec\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi + 2k\pi\ avec\ k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \theta = \pi \qquad car\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[.$$