Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

◉○◉○◉

3ème Maths

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (7 points)

On considère l'ensemble F des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$

telles que : $f(0)=-1$ *et pour tout réel x non nul,* $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

1) Soit f une fonction de l'ensemble F.

a) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

2) Dans la suite on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$.

a) Vérifier que g est un élément de F.

b) Montrer que g est majorée par 2 et minorée par -1.

lequel parmi -1 et 2 est un extrémum pour la fonction g ?

3) Soient a et b deux réels tels que $0\le a<b$.

a) Vérifier que $g(b)-g(a)=\frac{3(b^2-a^2)}{(a^2+1)(b^2+1)}$.

b) En déduire le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.

c) Résoudre, dans $[0,+\infty[$, chacune des équations $g(x)=0$ et $g(x)=1$.

d) En déduire $E(g(x))$ pour tout $x\in[0,+\infty[$ où E désigne la fonction partie entière.

Exercice 2 (4 points)

Soit le polynôme $P : x\mapsto x^4-x^3+2x^2-4x+2$.

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\frac{P(x)}{x-1}$.

1) Déterminer les réels a et b pour lesquels pour tout réel x,

$P(x)=(x-1)(x^3+ax+b)$.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et définir son prolongement g.

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α dans l'intervalle $[0.7;0.9]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.

Exercice 3 (6 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 2$ *et* $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

On considère les ensembles suivants :

$D = \left\{M \in P \text{ tels que } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 3\right\}$

$D' = \left\{M \in P \text{ tels que } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 3\right\}$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3$.

b) En déduire que $C \in D$ et $B \in D'$

2) Montrer que chacun des ensembles D et D' est une droite que l'on précisera.

3) Montrer que les droites D et D' se coupent suivant le point I orthocentre du triangle ABC.

4) On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et on note O son centre. (AI) recoupe $\mathscr{C}$ en A', (BI) recoupe $\mathscr{C}$ en B' et (CI) recoupe $\mathscr{C}$ en C'.

a) Soit E le point diamètralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

Vérifier que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$.

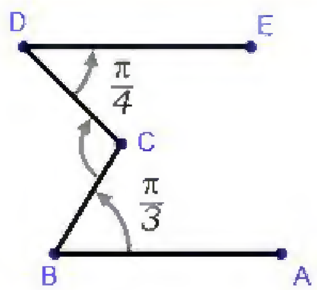
b) En déduire que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = IO^2 - OA^2$.

c) Montrer alors que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'}$.

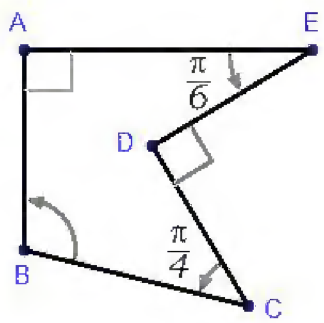
Exercice 4 (3 points)

Le plan est orienté dans le sens direct

1) Dans la figure ci – contre les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.



2) Dans la figure ci – contre les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires et de même pour les droites (CD) et (DE). Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



Correction du devoir

Correction de l'exercice 1

1) a) Pour $x = 1$ on a : $f(1) + f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

Pour $x = -1$ on a : $f(-1) + f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}$.

b) On a pour tout $x \neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - f(x)$ en plus f est continue en 0

donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$ d'où $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - (-1) = 2$.

2) a) ❖ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

❖ g est une fonction rationnelle donc g est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$

❖ $g(0) = -1$.

❖ Soit x un réel non nul, on a :

$$g\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) = \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{2 - x^2}{1 + x^2} + \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{2 - x^2 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

La fonction g réalise les quatre conditions précédentes donc c'est un élément de F.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) + 1 = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} + 1 = \frac{2x^2 - 1 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{3x^2}{x^2 + 1} \geq 0 \quad \Rightarrow g(x) \geq -1$

$$g(x) - 2 = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{-3}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow g(x) < 2.$$

Donc g est minorée par -1 et majorée par 2.

❖ On sait dèja que $g(0) = -1$ et puisque g est minorée par -1 alors -1 est un minimum pour g en 0.

❖ $g(x) = 2 \Leftrightarrow g(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$ ce qui est impossible donc 2 n'est pas un extrémum pour g.

3) a) $0 \leq a < b$, $g(b) - g(a) = \frac{2a^2 - 1}{a^2 + 1} - \frac{2b^2 - 1}{b^2 + 1} = \frac{(2a^2 - 1)(b^2 + 1) - (2b^2 - 1)(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2 - b^2 - 1 - (2b^2a^2 + 2b^2 - a^2 - 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{\cancel{2a^2b^2} + 2a^2 - b^2 \cancel{-1} - \cancel{2b^2a^2} - 2b^2 + a^2 \cancel{+1})}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

$$= \frac{3(a^2 - b^2)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

b) $a^2 + 1 > 0$ et $b^2 + 1 > 0$ et puisque $0 \leq a < b$ alors $a + b > 0$ et $a - b < 0$ et on a :

$$g(b) - g(a) = \frac{3(a^2 - b^2)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{3(a - b)(a + b)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} \Rightarrow g(b) - g(a) > 0 \text{ donc } g(a) < g(b)$$

Conclusion : g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

c) $g(x)=0$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2}$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$g(x)=1$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-1=x^2+1$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x^2=2$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

d) D'après 2)b) On sait que pour tout réel x, $-1\leq g(x)<2$

et puisque g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ alors :

$0\leq x<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow g(0)\leq g(x)<g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow -1\leq g(x)<0 \Rightarrow E(g(x))=-1.$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq x<\sqrt{2} \Rightarrow g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\leq g(x)<g(\sqrt{2}) \Rightarrow 0\leq g(x)<1 \Rightarrow E(g(x)=0.$

$\sqrt{2}\leq x \Rightarrow g(\sqrt{2})\leq g(x)<2 \Rightarrow 1\leq g(x)<2 \Rightarrow E(g(x))=1.$

Correction de l'exercice 2

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^4-x^3+2x^2-4x+2=(x-1)(x^3+ax+b)=x^4+ax^2+bx-x^3-ax-b$

$=x^4-x^3+ax^2+(b-a)x-b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-a=-4 \\ -b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ b-a=-2-2=-4 \text{ vrai} \end{cases} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=(x-1)(x^3+2x-2)$$

2) f prolongeable par continuité en 1 ssi f admet une limite finie en 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+2x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^3+2x-2)=1.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 et son prolongement g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3+2x-2$.

3) a) $g(0,7)=-0,257$ et $g(0,9)=0,529$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } [0,7;0,9] \\ g(0,7)\times g(0,9)<0 \quad (\text{c-à-d} \quad 0 \text{ compris entre } g(0,7) \text{ et } g(0,9)) \end{cases}$$

Donc l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in[0,7;0,9]$.

b) $g(0,8)=0,112 \Rightarrow g(0,7)\times g(0,8)<0$ donc $\alpha\in[0,7;0,8]$.

Donc $0,7\leq\alpha\leq 0,8$ est un encadrement de α d'amplitude $0,1$ (car $0,8-0,7=0,1$)

Correction de l'exercice 3

1) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=3\times 2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{1}{2}=3.$

b) Pour $M=C$ on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$ donc $C\in D$.

Pour $M=B$ on a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$ donc $B\in D'$.

2) $M\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=3$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\Leftrightarrow AB.AH=3$ et $H\in[AB) \Leftrightarrow AH=\dfrac{3}{AB}=\dfrac{3}{3}=1$ et $H\in[AB)$

Alors D est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

Et puisque $C \in D$ alors D est la hauteur du triangle ABC issue de son sommet C.

Le même raisonnement montre que D' est la hauteur du triangle ABC issue de B.

3) On sait que les trois hauteurs dans un triangle sont concourantes suivant son orthocentre. Et puisque D et D' sont deux hauteurs du triangle ABC alors D et D' se coupent en un point I qui est l'orthocentre de ce triangle.

4) a) $[AE]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ et $A' \in \mathscr{C} \Rightarrow A'$ est le projeté orthogonal de E sur (AI)

Donc $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}$.

b) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = \left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OE}\right) = IO^2 + \overrightarrow{IO}.\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}$

Or O est le milieu de $[AE]$ donc $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA}$ ce qui donne $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = IO^2 - OA^2$.

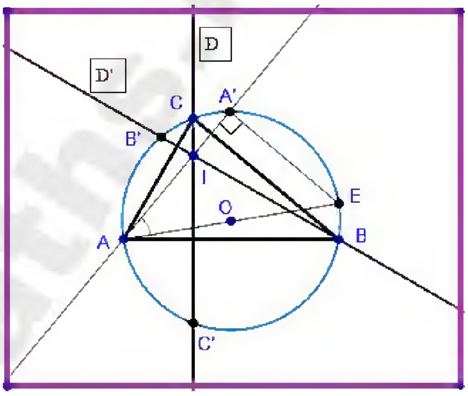
c) En considérant les points diamètralement opposés respectifs de B et C sur $\mathscr{C}$ et par analogie avec b) on montre que

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'} = IO^2 - OB^2$ et $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = IO^2 - OC^2$.

Or A, B et C sont des points du cercle $\mathscr{C}$ de centre O donc $OA = OB = OC$

Ainsi $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'} = IO^2 - r^2$

où r est le rayon du cercle $\mathscr{C}$



Correction de l'exercice 4

1) On a $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}}) \equiv 0\,[2\pi]$ et On applique la relation de chasles à plusieurs reprises :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}) + (\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{ED}})\,[2\pi]$$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} + \pi + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi\ [2\pi] \equiv\ 4\pi + \frac{7\pi}{12} + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{7\pi}{12} + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})\,[2\pi]$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}}) \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow\ (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$$

$-\frac{7\pi}{12} \in]-\pi,\pi]$ donc $-\frac{7\pi}{12}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.

2) On a : $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et d'autre part en appliquant la relation de Chasles et en remarquant que $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \pi + (\widehat{-\vec{u},\vec{v}})\ [2\pi]$ on obtient :

$$(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{ED}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AB}})\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} \equiv \pi + \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + \pi\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\ (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv -\cancel{\frac{\pi}{2}} - 5\pi - \frac{\pi}{6} + \cancel{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \equiv \pi - \frac{5\pi}{12} \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$$

$\frac{7\pi}{12} \in]-\pi,\pi]$ donc $\frac{7\pi}{12}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.