Épreuve : Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°2

◉○◉○◉

4ème Sciences expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x-\dfrac{e^x-3}{e^x+1}$.

On note $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de* f *dans le plan rapporté à un repère orhonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité sur les axes 2cm)*

1) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que la droite D_1 d'équation $y=x+3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Montrer que la droite D_2 d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.

4) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=1$.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α telle que $-2{,}8<\alpha<-2{,}7$

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, ses asymptotes et la tangente T.

7) Soit λ un réel strictement négatif.

On désigne par $A(\lambda)$ l'aire, en cm^2, de la région délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D_1 et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$.

a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=x+3-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$.

b) Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

c) En déduire $A(\lambda)$ en fonction de λ.

d) Vérifier que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=16\ln 2$.

Exercice 2

On chauffe dans une grosse cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$.

On admet que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = g(t) - 100$ est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2\times 10^{-4} y = 0$ vérifiant $f(0) = -80$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E), puis exprimer $f(t)$ en fonction de t.

b) Montrer que $g(t) = 100 - 80e^{-2\times 10^{-4}t}$.

Calculer $g(0)$.

2) a) Au bout de combien de temps la température atteint-elle $85°C$? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

b) La température peut-elle atteindre $100°C$? Justifier.

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65% de la production, et la machine B fournit le reste. Certains ampoules présentent un défaut de fabrication :

- *à la sortie de la machine A, 8% des ampoules présentent un défaut;*
- *à la sortie de la machine B, 5% des ampoules présentent un défaut.*

On définie les événements suivants :

- *A* : « l'ampoule provient de la machine A »;
- *B* : « l'ampoule provient de la machine *B* »;
- *D* : « l'ampoule présente un défaut ».

1) On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a) construire un arbre pondéré représentant la situation.

b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à $0,9305$.

c) L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2) On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme *indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.*

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1) Soit T une variable aléatoire qui suis une loi exponentielle de paramètre λ

On rappelle que pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Montrer que pour tout réel positif t, on a : $P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a)$.

2) Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$.

a) Calculer la probabilité $P(T \geq 2000)$.

b) Sachant qu'une ampoule sans défaut à dèja fonctionné pendant 7000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures.

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1-3e^{-x}}{1+e^{-x}} = +\infty.$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+3) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^x-3}{e^x+1}-3\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-e^x+3-3e^x-3}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

Donc la droite $D_1 : y = x+3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^x-3}{e^x+1}+1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-e^x+3+e^x+1}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right) = 0$$

Donc la droite $D_2 : y = x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) $$f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-3)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x+1)^2 - \cancel{e^{2x}} - e^x + \cancel{e^{2x}} - 3e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3) a) Montrons que pour tout réel x, $f(-x) = 2 - f(x)$.

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+1} = -x - \frac{1-3e^x}{1+e^x}$$

$$= -x + \frac{-1+3e^x}{1+e^x} = -x + \frac{2(e^x+1)+e^x-3}{1+e^x}$$

$$= -x + \frac{2(e^x+1)}{1+e^x} + \frac{e^x-3}{1+e^x} = -x + 2 + \frac{e^x-3}{e^x+1}$$

$$= 2 - \left(x - \frac{e^x-3}{e^x+1}\right) = 2 - f(x).$$

Donc le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ en I

$$T : y = f'(0)x + f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{T : y = 1}$$

4) f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le f(0) = 1 \\ x \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) = 1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \mathscr{C} \text{ est au dessous de } T \text{ sur }]-\infty,0] \\ \mathscr{C} \text{ est au dessus de } T \text{ sur } [0,+\infty[\end{cases}$

5) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Alors il existe et unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$f(-2,7) \times f(-2,8) = 0.0481 \times (-0.0293) < 0$

Donc $-2,8 < \alpha < -2,7$.

6) Voir figure.

7) a) $$x + 3 - \frac{4e^x}{e^x+1} = x + \frac{3e^x+3-4e^x}{e^x+1}$$

$$= x + \frac{-e^x+3}{e^x+1} = x - \frac{e^x-3}{e^x+1} = f(x).$$

b) h est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(e^x+1\right)$.

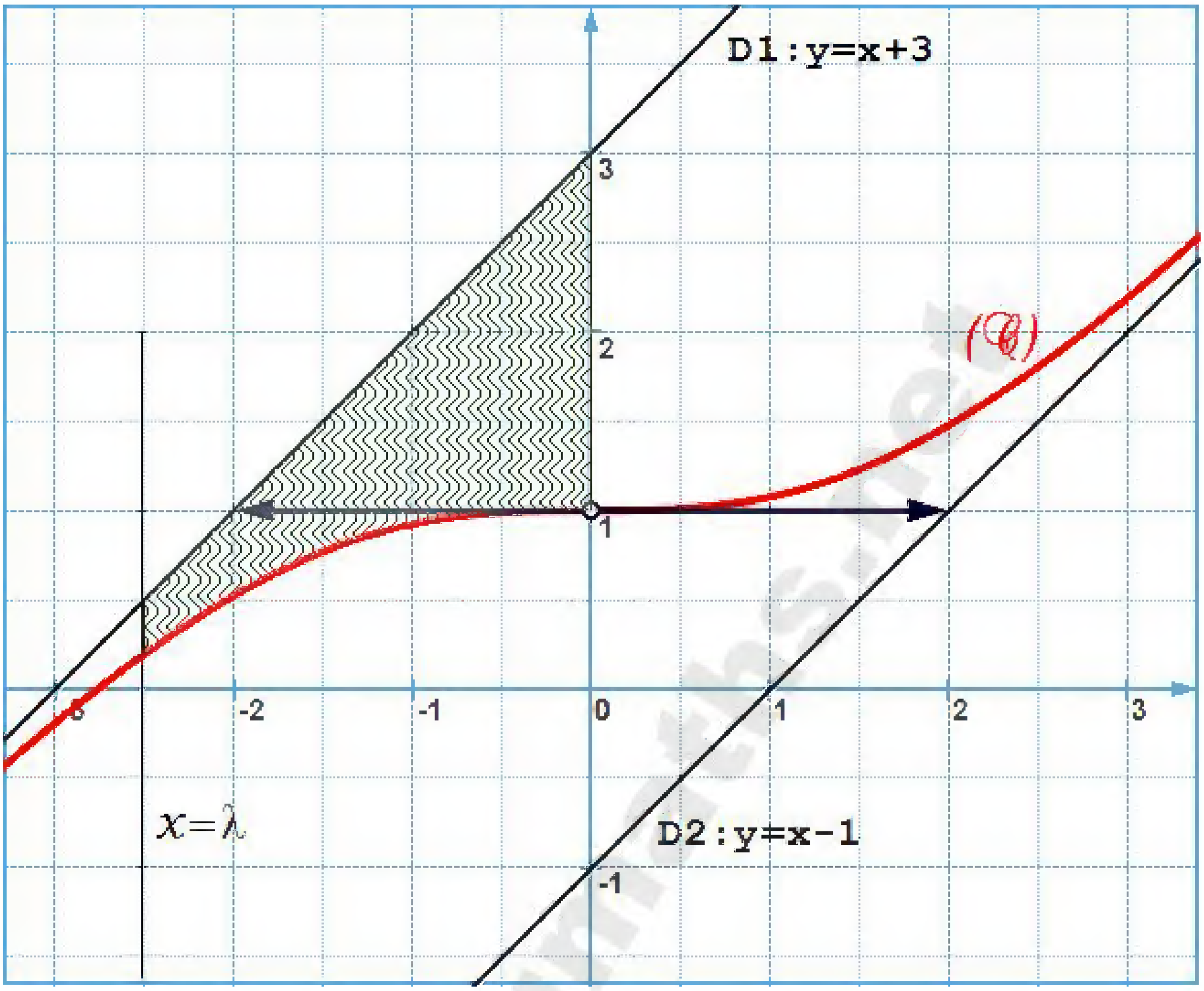
c) $$A(\lambda) = \left(\int_\lambda^0 \left|f(x)-(x+3)\right| dx\right) \times 4cm^2$$

$$= 4\int_\lambda^0 (x+3-f(x))dx = 4\int_\lambda^0 \frac{4e^x}{e^x+1}dx$$

$$= 16\int_\lambda^0 \frac{e^x}{e^x+1}dx = 16\left[\ln(e^x+1)\right]_\lambda^0$$

$$= 16(\ln 2 - \ln(e^\lambda+1)) = 16\ln\left(\frac{2}{e^\lambda+1}\right)$$

d) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = 0$ donc $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = 16\ln 2.$



Exercice 2

1) a) *L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay$ où $a = -2\times10^{-4}$ donc l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = -80$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = -80e^{a(t-0)} = -80e^{-2\times10^{-4}t}$.*

b) $f(t) = g(t) - 100 \Leftrightarrow g(t) = f(t) + 100$

Donc $g(t) = 100 - 80e^{-2\times10^{-4}t}$.

$g(0) = 100 - 80 = 20.$

2) a) $g(t) = 85 \Leftrightarrow 80e^{-2\times10^{-4}t} = 100 - 85 = 15$

$\Leftrightarrow e^{-2\times10^{-4}t} = {}^{15}\!/_{80} \Leftrightarrow -2\times10^{-4}t = \ln\left({}^{3}\!/_{16}\right)$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{10^4}{2}\ln\left({}^{3}\!/_{16}\right) \simeq 8370s$$

$8370 = 139\times60 + 30$ *et* $139 = 2\times60 + 19$

Donc au bout de 2h19m30s la température atteint 85°C.

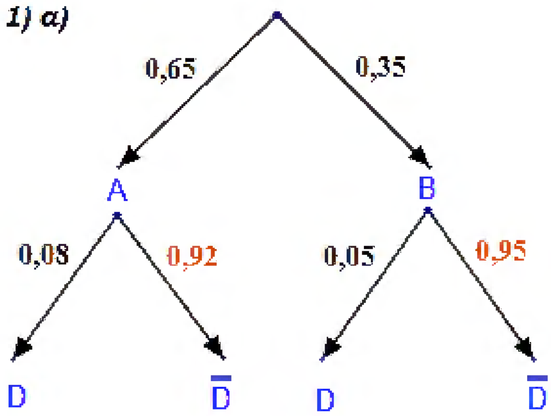
b) $g(t) = 100 \Leftrightarrow 80e^{-2\times10^{-4}t} = 100 - 100 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-2\times10^{-4}t} = 0$ *ce qui est imposible car la fonction exponentielle est strictement positive sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Partie A

1) a)



b) D'après la formule des probabilité totale on a :

$$p(\overline{D}) = p(A)\times p_A(\overline{D}) + p(B)\times p_B(\overline{D})$$
$$= 0,65\times 0,92 + 0,35\times 0,95 = \boxed{0,9305}.$$

c) $$p_{\overline{D}}(A) = \frac{p(\overline{D}\cap A)}{p(\overline{D})} = \frac{p(A)\times p_A(\overline{D})}{p(\overline{D})}$$
$$= \frac{0,65\times 0,92}{0,9305} \simeq \boxed{0,643}.$$

2) Si on désigne par X la variable aléatoire qui prent pour valeur le nombre d'ampoules qui ne présentent aucun défaut, alors X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,92$

$$p(X\geq 9) = p(X=9) + p(X=10)$$
$$= C_{10}^{9}0,92^{9}(1-0,92) + 0,92^{10}$$
$$= 10\times 0,92^{9}\times 0,08 + 0,92^{10}$$
$$= 0,92^{9}\left(10\times 0,08 + 0,92\right)$$
$$= 0,92^{9}\times 1,72 \simeq \boxed{0,812}$$

Partie B

1) On a $p(T\leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

et $p(T\geq t) = 1 - p(T\leq t) = e^{-\lambda t}$.

$$P_{T\geq t}(T\geq t+a) = \frac{p\left((T\geq t)\cap(T\geq t+a)\right)}{p(T\geq t)}$$

Or $T\geq t+a \Rightarrow T\geq t$

donc $(T\geq t+a)\subset(T\geq t)$

D'où $(T\geq t)\cap(T\geq t+a) = (T\geq t+a)$

Alors $$P_{T\geq t}(T\geq t+a) = \frac{p(T\geq t+a)}{p(T\geq t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda a} = p(T\geq a).$$

2) a) $p(T\geq 2000) = e^{-0,0001\times 2000}$
$$= e^{-0,2} \simeq \boxed{0,819}$$

b) $p_{T\geq 7000}(T\geq 12000) = p(T\geq 5000)$ d'après 1)

Donc $p_{T\geq 7000}(T\geq 12000) = e^{-0,0001\times 5000}$
$$= e^{-0,5} \simeq \boxed{0,607}$$