Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°4

4ème Sciences expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique 2cm).

1) a) Prouver que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout réel $x>0$, $x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. (1)

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}$.

c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{12}$. (2)

3) a) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

b) Etablir que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $g(x) \leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$.

A l'aide de (2) établir le sens de variation de f.

4) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$.

b) À l'aide de (2), montrer que pour tout $x>0$ on a : $\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{x}{12} \leq \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2+x}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=\dfrac{-1}{2}$.

5) Soit T la demi tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a) Justifier, à l'aide de (1), que T est au dessous de $\mathscr{C}$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

c) Tracer $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 2

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont 30 sont considérés comme neufs, 90 sont considérés comme récents et les autres sont considérés comme anciens.
Une étude statistique indique que 5% des ordinateurs neufs sont défaillants, ainsi que 10% des ordinateurs récents et 20% des ordinateurs anciens.
On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.
On note les événements suivants :
N : " L'ordinateur est neuf."
R : " L'ordinateur est récent."
A : " L'ordinateur est ancien."
D : " L'ordinateur est défaillant."

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2) Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3) Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,1325.
4) Déterminer la probavilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant.
5) On choisit au hasard trois ordinateurs dans le parc et on suppose que ce choix est assimilé à troix tirages successifs et avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant.

Pour les questions 4 et 5, donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

$1)\ a)$ Soit $t \geq 0;\ 1-t-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{1-t^2-1}{1+t}=\dfrac{-t^2}{1+t}\leq 0$ et $\dfrac{1}{1+t}-1=\dfrac{1-1-t}{1+t}=\dfrac{-t}{1+t}\leq 0.$

Donc pour tout réel positif t, on a : $1-t\leq \dfrac{1}{1+t}\leq 1.$

$b)$ Pour $x>0$; on a $\forall t\in[0,x],\ 1-t\leq \dfrac{1}{1+t}\leq 1 \Rightarrow \int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x \dfrac{dt}{1+t}\leq \int_0^x 1dt$

Donc $\left[t-\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq [t]_0^x$ ou encore $x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x.$ (1)

$2)\ a)\ g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2}=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{4}{(2+x)^2}=\dfrac{4+4x+x^2-4-4x}{(1+x)(2+x)^2}=\dfrac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}.$

$b)$ Pour $x\geq 0;\ 1+x\geq 1$ et $2+x\geq 2\Rightarrow (1+x)(2+x)^2\geq 1.2^2=4\Rightarrow 0\leq \dfrac{1}{(1+x)(2+x)^2}\leq \dfrac{1}{4}$

Donc $0\leq \dfrac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}\leq \dfrac{x^2}{4}$ ou encore $0\leq g'(x)\leq \dfrac{x^2}{4}.$

$c)$ Pour $x\geq 0$; on a $\forall t\in[0,x], 0\leq g'(t)\leq \dfrac{t^2}{4}$

Donc $0\leq \int_0^x g'(t)dt\leq \int_0^x \dfrac{t^2}{4}dt \Leftrightarrow 0\leq [g(t)]_0^x \leq \left[\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^x \Leftrightarrow 0\leq g(x)-g(0)\leq \dfrac{x^3}{12}$

Et puisque $g(0)=0$ on obtient $0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}.$ (2)

$3)\ a)$ Soit $x>0;\ f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right).$

$b)\ g(x)-\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}-\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2x}{2+x}=\dfrac{-x^2}{(1+x)(2+x)}$

Pour $x>0$ on a : $g(x)-\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\leq 0$ donc $g(x)\leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}.$

On a $\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leq -g(x)$ et d'après (2) on a $g(x)\geq 0\Rightarrow -g(x)\leq 0$

donc $\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leq 0$ et par suite $f'(x)\leq 0$ et f est décroissante sur $[0,+\infty[.$

$4)\ a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}.\dfrac{1+x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}.\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=0\times 1=0.$

$b)\ 0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}\Leftrightarrow 0\leq \ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}\leq \dfrac{x^3}{12}\Leftrightarrow \dfrac{2x}{2+x}\leq \ln(1+x)\leq \dfrac{x^3}{12}+\dfrac{2x}{2+x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2+x}-x\le \ln(1+x)-x\le \frac{x^3}{12}+\frac{2x}{2+x}-x \Leftrightarrow \frac{-x^2}{2+x}\le \ln(1+x)-x\le \frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{2+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2+x}-\frac{x^3}{12}\le x-\ln(1+x)\le \frac{x^2}{2+x} \Leftrightarrow \frac{1}{2+x}-\frac{x}{12}\le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le \frac{1}{2+x}.$$

c) Pour $x>0$ on a $\frac{1}{2+x}-\frac{x}{12}\le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le \frac{1}{2+x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x}-\frac{x}{12}=\frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2} \quad (\text{d'après c)})$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

5) a) $T : y=f'_d(0)x+f(0)=-\frac{1}{2}x+1$ avec $x\ge 0$.

Soit $x>0$; $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}-1=\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x\right)\ge 0$

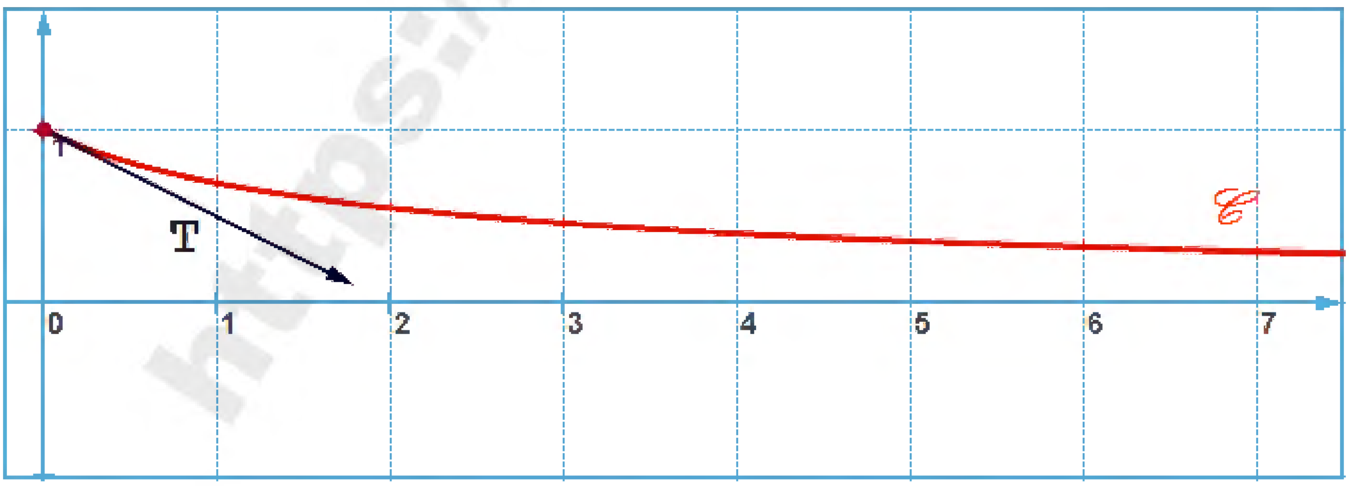
Car d'après (1) on a $\ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$ pour $x\ge 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la demi tangente T.

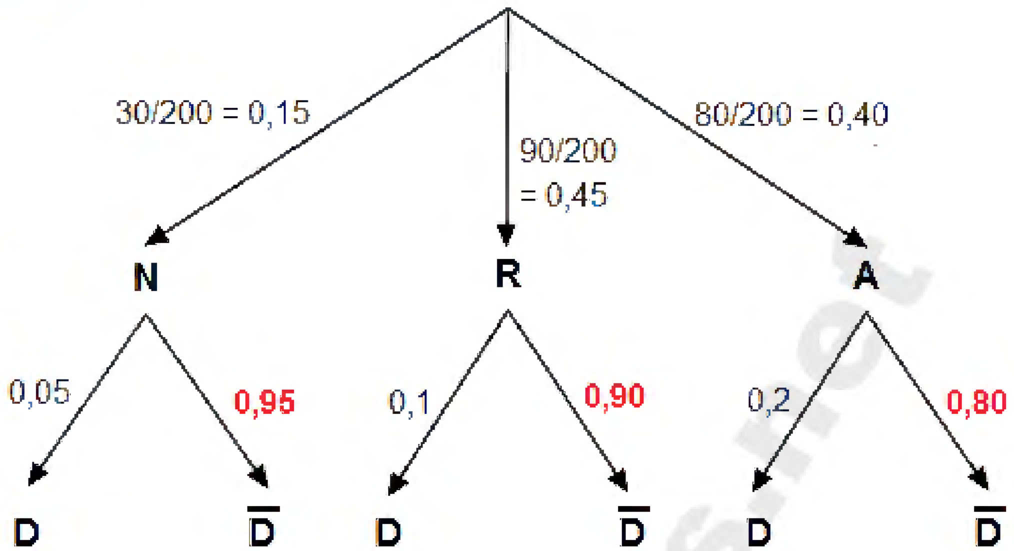
b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ +	
$f(x)$	1 ↘	0

c)



Exercice 2



2) $p(N\cap D)=p(N)\times p_N(D)=0,15\times 0,05=0,0075.$

3) On a aussi : $p(R\cap D)=p(R)\times p_R(D)=0,45\times 0,1=0,045$

Et $p(A\cap D)=p(A)\times p_A(D)=0,4\times 0,2=0,08$

Or d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(D)=p(N\cap D)+p(R\cap D)+p(A\cap D)=0,0075+0,045+0,08=0,1325.$$

4) $p_D(A)=\dfrac{p(A\cap D)}{p(D)}=\dfrac{0,08}{0,1325}\simeq 0,6$

5) $p=p(D,\overline{D},\overline{D})+p(\overline{D},D,\overline{D})+p(\overline{D},\overline{D},D)=3\times p(D)\times p(\overline{D})^2=3\times 1325\times 0,8675^2\simeq 0,3.$