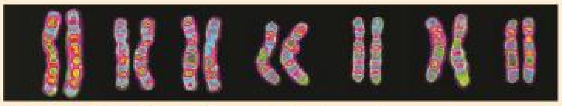
Probabilité conditionnelle – Phénomène génétique aléatoire

TP 2 La loi de Hardy-Weinberg



→ Utiliser un tableur pour étudier un phénomène génétique aléatoire.

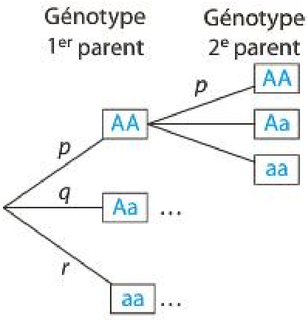
Les chromosomes sont porteurs de l'information génétique. Ils sont composés de gènes pouvant prendre différentes formes appelées allèles.
Dans ce TP, on considère les cas simples pour lesquels un gène peut prendre deux formes (ou « allèles ») distinctes : A ou a.
Les chromosomes allant par paire, chaque gène est présent deux fois dans l'information génétique. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa ou aa. On considère que ces couples se forment au hasard. Au moment de la reproduction, un enfant hérite d'un allèle des gènes de chacun de ses parents, chaque allèle étant choisi au hasard.

A. Génotypes des parents

On considère une population dont les proportions des génotypes sont celle du tableau ci-contre.

AA	Aa	aa
p	q	r

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre.



2. a. Quelle est la probabilité pour qu'un enfant ait deux parents de génotype AA ?

b. Vérifier que la probabilité qu'un enfant ait un de ses parents de génotype AA et l'autre de génotype Aa est $2pq$.

3. Effectuer des calculs similaires pour les autres cas de génotypes des parents et compléter la 3e colonne du tableau suivant.

Génotype parents		Probabilité Génotype parents	Probabilités conditionnelles Génotype enfant		
			AA	Aa	aa
AA	AA		1	0	0
AA	Aa	$2pq$	0,5	0,5	0
AA	aa				
Aa	Aa				
Aa	aa				
aa	aa				

B. Génotype de l'enfant

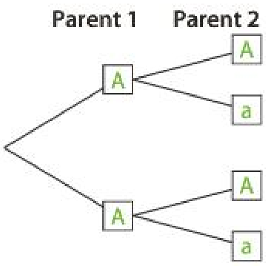
1. Sachant qu'un enfant a ses deux parents de génotypes AA, quel est nécessairement son génotype ?

2. On s'intéresse à un enfant dont l'un des parents est de génotype AA et l'autre est de génotype Aa.
En utilisant l'arbre ci-contre, vérifier que :

a. la probabilité que cet enfant soit de génotype AA est 0,5 ;

b. la probabilité que cet enfant soit de génotype Aa est 0,5 ;

c. la probabilité que cet enfant soit de génotype aa est 0.



3. Effectuer des calculs similaires pour les autres cas de génotypes des parents et compléter les trois dernières colonnes du tableau précédent.

4. Vérifier les propositions suivantes.

a. La probabilité p_1 qu'un enfant soit de génotype AA est :

$$p_1 = p^2 + pq + \frac{1}{4}q^2 = \left(p + \frac{1}{2}q\right)^2$$

b. La probabilité q_1 qu'un enfant soit de génotype Aa est :

$$q_1 = 2\left(p + \frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{2}q + r\right)$$

c. La probabilité r_1 qu'un enfant soit de génotype aa est :

$$r_1 = \left(\frac{1}{2}q + r\right)^2$$

5. Calculer p_1, q_1 et r_1 lorsque $p = 0{,}4$ et $q = r = 0{,}3$.

C. Étude sur plusieurs générations

1. Compléter une feuille de tableur comme ci-dessous.

	A	B	C	D
1	Génération	P (AA) = p	P (Aa) = q	P (aa) = r
2	0	0,4	0,3	0,3
3	1			
4	2			
5	3			

2. a. Introduire une formule en **B3** calculant la probabilité p_1 à partir des valeurs contenues dans les cellules **B2**, **C2** et **D2**.

b. Introduire, de même, une formule en **C3** calculant la probabilité q_1 et une formule en **D3** calculant la probabilité r_1.

c. Vérifier que les valeurs de p_1, q_1 et r_1 sont bien celles obtenues à la question **B. 5**.

3. Recopier vers le bas les formules de la ligne **3** afin d'obtenir les probabilités correspondant aux générations suivantes.

4. a. Modifier les valeurs des proportions initiales de la ligne **2**. Que peut-on observer ?

b. Quelle conjecture peut-on faire concernant la répartition des génotypes sur plusieurs générations ? Cette conjecture peut se démonter, c'est la **loi de Hardy-Weinberg**.

Exercice : Probabilité conditionnelle et génétique

Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariements au hasard - Loi de Hardy-Weinberg

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif). Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants :

AA ou Aa ou aa

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.

Exemples :

- si un parent a le génotype AA et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.
- si un parent a le génotype Aa et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa ou aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ respectivement.

On note p_n, q_n et r_n les proportions des génotypes AA, Aa, aa de la génération n.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau à deux entrées, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.
2. En déduire les proportions p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
3. On note $\alpha = p_0 - r_0$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n - r_n = \alpha$
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre α.
   En déduire que pour $n \geqslant 1$, les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont **constantes**.

Ce résultat est connu sous le nom de "loi de l'équilibre génétique de Hardy-Weinberg". Ainsi, quelles que soient les proportions initiales des trois génotypes, la répartition est stabilisée dès la génération suivante.

Solution de l'exercice

2. D'après les règles de calculs sur les arbres, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2} p_n q_n + \frac{1}{2} p_n q_n + \frac{1}{4} q_n^2$$

$$= p_n^2 + p_n q_n + \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$$

De même : $r_{n+1} = \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$

Et puisque $p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$:

$$q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

3. a) D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

$$= (p_n - r_n)(p_n + q_n + r_n) = p_n - r_n$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$p_n - r_n = p_0 - r_0 = \alpha$

b) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}\right)^2$$

$p_n + \frac{q_n}{2} = p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}$ Et comme
$p_n - r_n = \alpha$ et $2r_n + q_n = 1 - p_n + r_n = 1 - \alpha$,
on obtient : $p_n + \frac{q_n}{2} = \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}$

D'où : $p_{n+1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$ Et enfin :

$$q_{n+1} = 1 - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1-\alpha^2}{2}$$

On a prouvé que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes à partir du rang $n = 1$.