Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°3

4ème Sc. expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit (I_n) la suite réelle définie par : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx$

1) a) Calculer I_0.

b) A l'aide d'une integration par partie, calculer I_1.

2) a) A l'aide de deux integrations par parties successives, montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} = (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+2)(n+1)I_n$.

b) En déduire I_2 et I_3.

c) Calculer, alors, l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2x + x^2 - x^3)\sin x\,dx$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par : $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$. On a représenté sur la feuille annexe (Figure1) la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.

1) a) A l'aide d'une lecture graphique, justifier que f est une bijection de $[0,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Reproduire la figure 1 de la feuille annexe sur votre copie et tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}, dans le meme repère.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2) On se propose, dans cette question, de calculer le réel $\varphi = \int_0^2 f(t)dt$.

On définit alors la fonction g sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \int_0^{2-2\cos x} f(t)dt$.

a) Soit F la primitive de f sur l'intervalle $[0,2]$ qui s'annule en 0.

Donc pour tout $x \in I$, $g(x) = F(2 - 2\cos x)$.

Montrer que g est dérivable sur I et vérifier que pour tout $x \in I$, $g'(x) = 4\sin^2 x$.

b) En déduire que pour tout $x \in I$, $g(x) = 2x - \sin(2x)$.

c) Calculer, alors, φ.

3) a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un arc de cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Retrouver alors le réel φ défini dans la question précédente.

4) Soit R la région du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

Hachurer la région R et déterminer son aire A.

5) Soit S le solide de révolution obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses (Voir feuille annexe figure 2).
Calculer le volume V du solide S.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soient S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-6=0$ et P le plan d'équation $x-y+z-2=0$.

1) Montrer que S est la sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et le rayon $2\sqrt{3}$.

2) Montrer que S et P sont tangents et déterminer les coordonnées de leur point de contact H.

3) Soit le plan P_m d'équation $x-my+z-m-1=0$ où m est un paramètre réel.

a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, les positions relatives de S et P_m.

b) Déterminer et caractériser l'ensemble $\mathscr{C}=S\cap P_{-1}$.

4) Pour tout réel θ de l'intervalle $[0,2\pi[$ on associe le point $M(x,y,z)$ tel que :

$x=-1-2\sqrt{2}\cos\theta,\ \ y=2+\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ et $z=-1+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta$.

Montrer que pour tout réel $\theta\in[0,2\pi[$, $M\in\mathscr{C}$

Annexe

Figure1

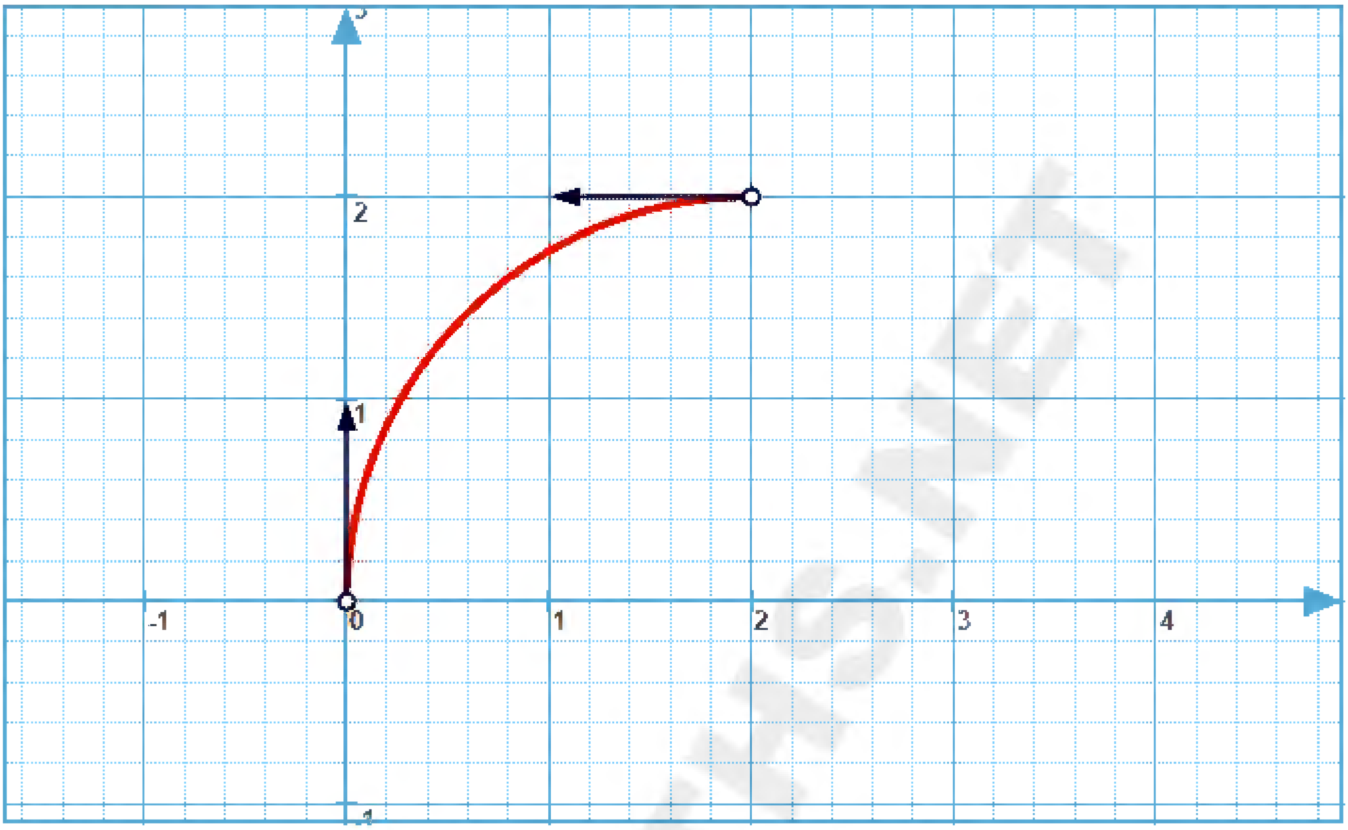
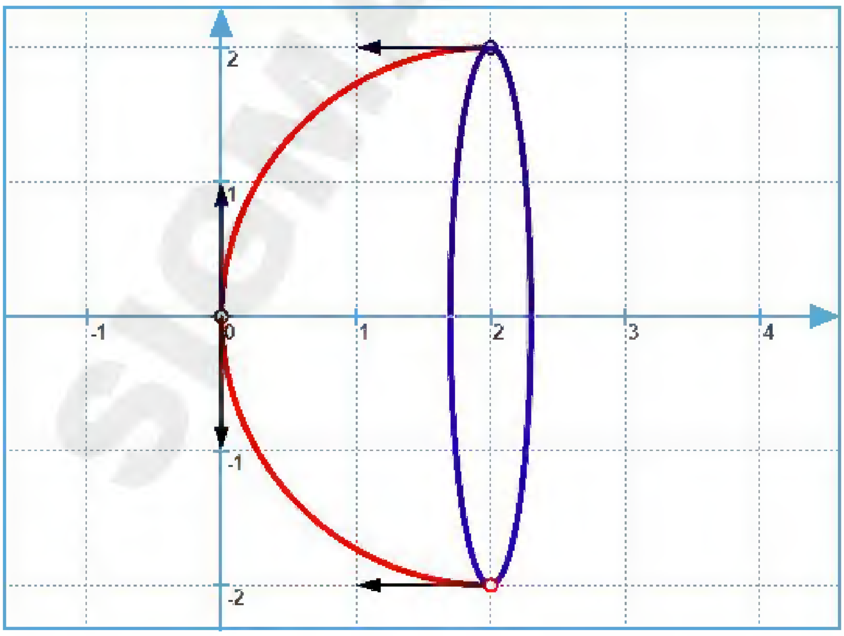


Figure2



CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1.$

b) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ on pose $\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x \Leftarrow v(x) = -\cos x \end{cases}$

Donc $I_1 = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

2) a) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2} \sin x\, dx.$

$\begin{cases} u(x) = x^{n+2} \Rightarrow u'(x) = (n+2)x^{n+1} \\ v'(x) = \sin x \Leftarrow v(x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I_{n+2} = \left[-x^{n+2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\cos x dx$

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v'(x) = \cos x \Leftarrow v(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow I_{n+2} = (n+2)\left(\left[x^{n+1}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n}\sin x dx\right)$

Donc $I_{n+2} = (n+2)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right) = (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+2)(n+1)I_n \quad (*)$

b) D'après (*), $I_2 = I_{0+2} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - 2I_0 = \pi - 2$ et $I_3 = I_{1+2} = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 6I_1 = \frac{3\pi^2}{4} - 6.$

c) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2x + x^2 - x^3)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx$

$= I_0 - 2I_1 + I_2 - I_3 = 1 - 2 + (\pi - 2) - \left(\frac{3\pi^2}{4} - 6\right) = 3 + \pi - \frac{3}{4}\pi^2.$

Exercice 2

1) a) La fonction $x \mapsto 4x - x^2$ est continue et positive sur $[0,2]$ donc f est continue sur $[0,2]$ en plus f est strictement croissante (f est croissante et aucun intervalle ouvert sur lequel f est constante)

Donc f est une bijection de $[0,2]$ sur $J = f([0,2]) = [0,2]$ (graphiquement)

b) La courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} est le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c) Soient x et y deux réels de l'intervalle $[0,2]$ tels que $f^{-1}(x) = y$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{4y - y^2} = x \Leftrightarrow 4y - y^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 - 4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow |y-2| = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow 2 - y = \sqrt{4 - x^2}$

$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{4 - x^2} = f^{-1}(x).$

Autrement : $y^2 - 4y + x^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4x^2 = 4(4 - x^2) \geq 0$ donc les solutions sont :

$$y_1 = \frac{4-2\sqrt{4-x^2}}{2} = 2-\sqrt{4-x^2} \text{ et } y_2 = 2+\sqrt{4-x^2} \text{ à rejeter car } y_2 > 2 \text{ pour } x \in]0,2[.$$

2) a) $\forall x \in I,\ g(x) = F(2-2\cos x) = F(u(x))$ avec $u(x) = 2-2\cos x$.

$x \in I \Rightarrow 0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -2 \le -2\cos x \le 0 \Rightarrow 0 \le 2-2\cos x \le 2 \Rightarrow u(x) \in [0,2]$

$$\begin{cases} u : x \mapsto 2-2\cos x \text{ est dérivable sur } I \\ F \text{ est dérivable sur } [0,2] \\ \forall x \in I, u(x) \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} g = F o u \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I \\ g'(x) = u'(x) \times F'(u(x)) \\ \qquad = u'(x) \times f(u(x)). \end{array} \right.$$

$$g'(x) = 2\sin x\sqrt{4(2-2\cos x)-(2-2\cos x)^2} = 2\sin x\sqrt{8-8\cos x-4+8\cos x-4\cos^2 x}$$

$$= 2\sin x\sqrt{4(1-\cos^2 x)} = 2\sin x.2\sqrt{\sin^2 x} = 4\sin x|\sin x| = 4\sin^2 x \text{ car } \sin x > 0 \text{ sur } I.$$

b) Soit $x \in [0,2]$. On a $g'(t) = 4\sin^2 t$ et $g(0) = 0$ donc $g(x) = \int_0^x 4\sin^2 t\, dt$

Alors $g(x) = 4\int_0^x \sin^2 t\, dt = 4\int_0^x \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 4\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x = 2x - \sin 2x.$

c) $\varphi = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^{2-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(t)dt = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

3) a) $M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = f(x)$ et $x \in [0,2] \Leftrightarrow y = \sqrt{4x-x^2}$ et $x \in [0,2]$

$\Leftrightarrow y^2 = 4x - x^2$ avec $x \in [0,2]$ et $y \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$ avec $x \in [0,2]$ et $y \ge 0$

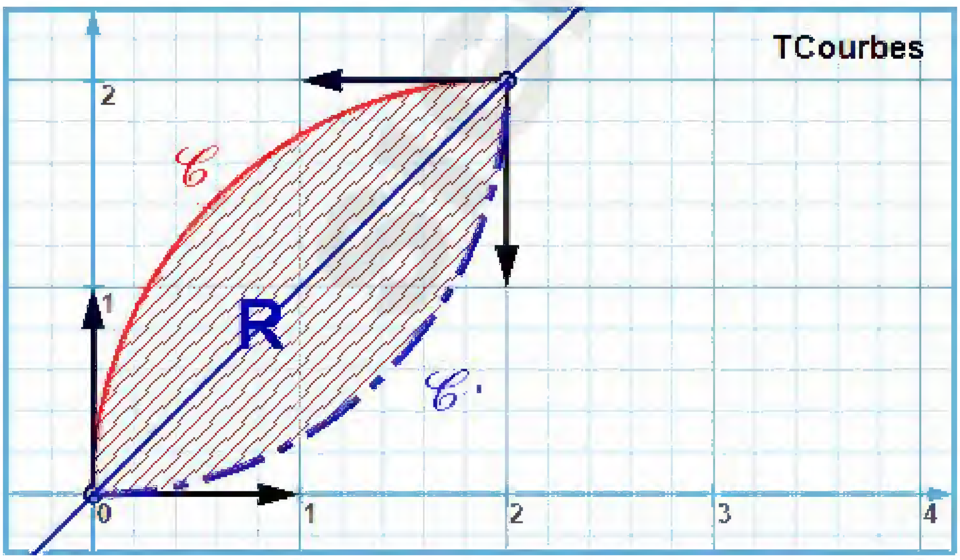
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ avec $x \in [0,2]$ et $y \ge 0$.

Donc $\mathscr{C}$ est l'arc du cercle de centre $E(2,0)$ et de rayon 2 situé dans la région définie par $0 \le x \le 2$ et $y \ge 0$.

b) $\varphi = \dfrac{\text{L'aire du disque } D(E,2)}{4} = \dfrac{\pi \times 2^2}{4} = \pi.$

4) Par raison de symétrie $A = 2\int_0^2 (f(t)-t)dt = 2\int_2^2 f(t)dt - 2\int_0^2 t dt = 2\varphi - \left[t^2\right]_0^2 = 2\pi - 4.$

5) $V = \pi\int_0^2 (f(t))^2 dt = \pi\int_0^2 (4t-t^2)dt = \pi\left[2t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \pi\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$



Exercice 3

1) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-6=0 \Leftrightarrow (x^2+2x)+(y^2-4y)+(z^2+2z)-6=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+1)^2-1-6=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=12=(2\sqrt{3})^2$

Donc S est la sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

2) $d(I,P)=\dfrac{|-1-2-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times 3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=$ Rayon de la sphère.

Donc S et P sont tangents. Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de I sur P

donc $H\in P$ et $\overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal au plan P.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+1=\alpha\\ x-2=-\alpha\\ x+1=\alpha\\ H\in P\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+\alpha\\ x=2-\alpha\\ x=-1+\alpha\\ (-1+\alpha)-(2-\alpha)+(-1+\alpha)-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=2\\ x=1\\ y=0\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow H(1,0,1)$$

3) a) $d_m=d(I,P_m)=\dfrac{|-1-2m-1-m-1|}{\sqrt{m^2+2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{m^2+2}}$. On pose $f(m)=(2\sqrt{3})^2-d_m{}^2$

$$f(m)==12-\frac{(3m+3)^2}{m^2+2}=\frac{3(m^2-6m+5)}{m^2+2}$$ qui admet le signe du trinome m^2-6m+5

m	$-\infty$	1		5		$+\infty$
$f(m)$	+	0	-	0	+	
Positions relatives de S et Pm	S et Pm sont sécants		S et Pm sont extérieurs		S et Pm sont sécants	

Pour m=1 ou m=5 S et Pm sont tangents.

b) $\mathscr{C}=S\cap P_{-1}$ avec $P_{-1}: x+y+z=0$

$d(I,P_{-1})=\dfrac{|-1+2-1|}{\sqrt{3}}=0$ donc $I\in P_{-1}$ et $\mathscr{C}$ est un grand cercle de la sphère S

c-à-d de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$.

4) Vérifions que $M\in S$

$(\cancel{1}-2\sqrt{2}\cos\theta\cancel{+1})^2+(\cancel{2}+\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta\cancel{-2})^2+(\cancel{-1}+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta\cancel{+1})^2$

$=8\cos^2\theta+2\cos^2\theta-2\sqrt{12}\cos\theta\sin\theta+6\sin^2\theta+2\cos^2\theta+2\sqrt{12}\cos\theta\sin\theta+6\sin^2\theta$

$=12\cos^2\theta+12\sin^2\theta=12(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=12$ donc $M\in S$.

Vérifions que $M\in P_{-1}$

$(-1-2\sqrt{2}\cos\theta)+(2+\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta)+(-1+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta)$

$=-1+2-1-2\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{6}\sin\theta=0$ donc $M\in P_{-1}$

Conclusion : Pour tout réel $\theta\in[0,2\pi[$, $M\in S\cap P_{-1}$.