Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de synthèse n°1

4ème Sciences expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1 et interpréter les résultats obtenus.

2) a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et l'asymptote D.

4) On note g la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout réel $x \in J$, $g^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g^{-1} dans le même repère que $\mathscr{C}$.

5) Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$)

Exercice 2 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(-1,1,1)$; $B(1,-1,1)$; $C(1,1,-1)$ et $D(2,2,2)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) Caculer l'aire du triangle ABC.

b) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à $\frac{10}{3}$.

c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

3) a) Montrer que D est un point de l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Montrer que le triangle ABC est équilateral et déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

c) Retrouver alors la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,2[$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Soient F l'unique primitive de f sur l'intervalle $]0,2[$, qui s'annule en 1 et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=F(1-\sin x)$.

1) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=-1$.

2) En déduire $g(x)$ pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Déterminer $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{3}{2}\right)$ et $F\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

4) Soit la fonction H définie sur $]0,2[$ par : $H(x)=F(x)+F(2-x)$.

a) Justifier la dérivabilité de H sur $]0,2[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,2[$, $F(2-x)=-F(x)$.

Correction du devoir

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}+1=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}+1$

$=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}+1=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+1=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -1

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}+1=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}+1$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}+1=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}+1=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

La courbe $\mathscr{C}$ admet aux points d'abscisses -1 et 1 deux demi-tangentes verticales.

2) a) La fonction $x\mapsto x^2-1$ est dérivable et strictement positive sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ donc f est dérivable sur chacun de ces intervalles.

$\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$

b) $f'(x)>0$ si $x>1$ et $f'(x)=\dfrac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\sqrt{x^2-1}}<0$ si $x<-1$.

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	1	↗	$+\infty$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

Donc la droite $D: y=2x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisse) est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$. (Voir figure)

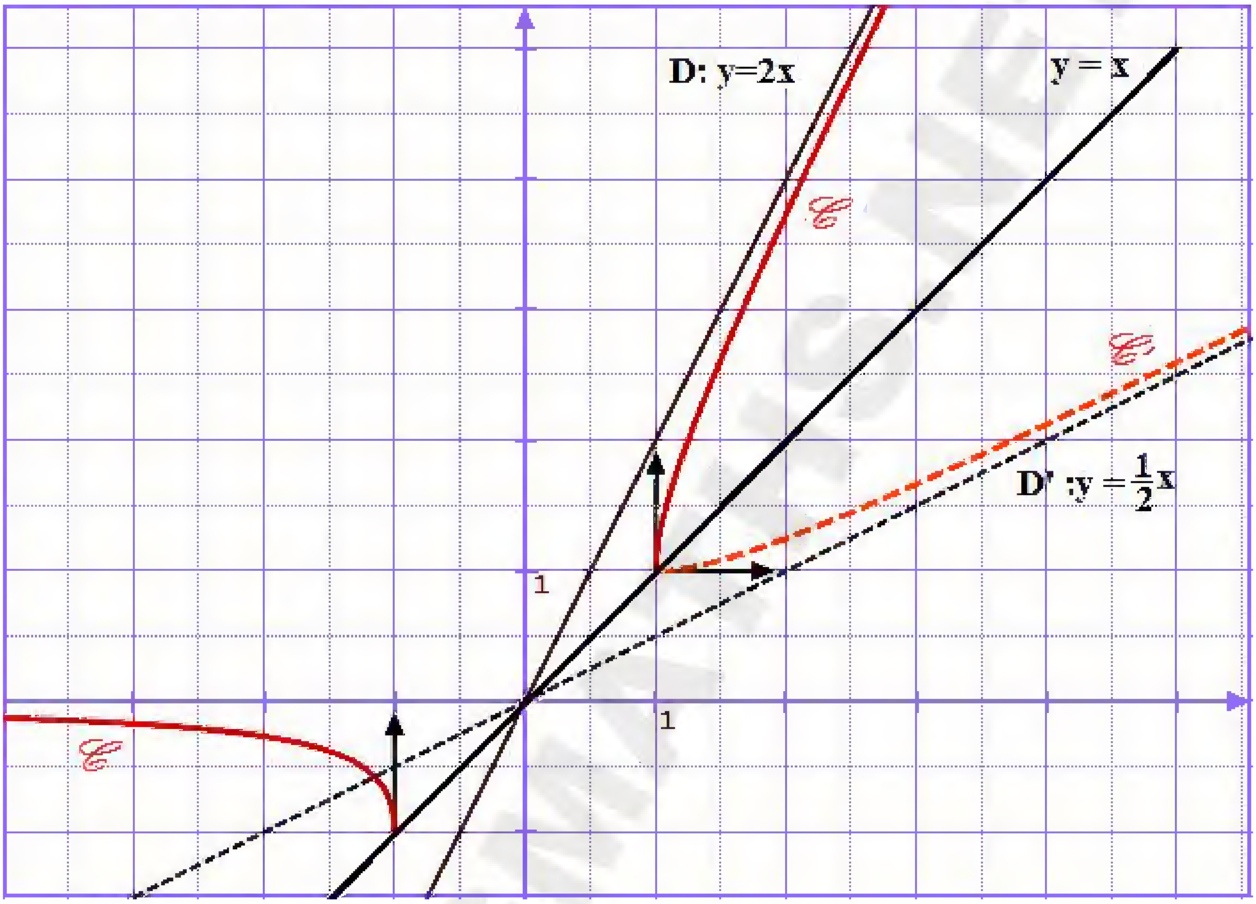
4) a) g est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle $g\left([1,+\infty[\right)=[1,+\infty[=J$ (voir tableau de variation de f)

b) Pour tous réels x et y de l'intervalle $[1,+\infty[$ on a :

$$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}+y=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}=x-y \Leftrightarrow y^2-1=(x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2-1=x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow 2xy=x^2+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2x}=g^{-1}(x).$$

c) La courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $\Delta : y=x$ donc $\mathscr{C}'$ admet une demi – tangente horizontale au point d'abscisse $1=g(1)$ et admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite $D'=S_\Delta(D) : y=\frac{1}{2}x.$



5) a) On procède par récurrence.

$u_0 \geq 1$ ce qui est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$

f est croissante sur $[1,+\infty[$ donc $u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1.$

b) On procède aussi par récurrence.

$u_1 = f(u_0) = \sqrt{u_0^{\,2}-1}+u_0 \geq u_0$ vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

f est croissante sur $[1,+\infty[$ donc $u_{n+1} \geq u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}.$

c) Supposons que la suite (u_n) est majorée. (u_n) croissante et majorée donc elle converge vers une limite l et puisque $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $l \geq 1$

$$\left(u_{n+1}=f(u_n)\,,\ f\ continue\ sur\ [1,+\infty[\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1\ et\ \lim_{n\to+\infty}u_n=l\right)\Rightarrow f(l)=l$$

$f(l)=l \Leftrightarrow \sqrt{l^2-1}+l=l \Leftrightarrow l^2-1=0 \Leftrightarrow l=1$ *car* $l\geq 1$.

D'autre part (u_n) *est croissante donc* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq u_0$ *et par passage à la limite on aura* $l\geq u_0>1$ *ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé donc notre supposition* ((u_n) *est majorée) est fausse c-à-d* (u_n) *n'est pas majorée.*

Finalement (u_n) *croissante et non majorée donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exercice 2

1) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0\\0&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&2\\0&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\-2&0\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}.$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ *donc les points A, B et C ne sont pas alignés.*

c) $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=4(2+1)+4(2-1)+4(2-1)=20\neq 0$

Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) *L'aire de ABC* $=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{\sqrt{4^2+4^2+4^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3\times 4^2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

b) *Le volume du tétraèdre ABCD* $=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{20}{6}=\dfrac{10}{3}.$

c) *Le volume du tétraèdre ABCD* $=\dfrac{10}{3}=\dfrac{1}{3}\times$ (*l'aire du triangle ABC*) $\times h$ *où h est la hauteur du tétraèdre issue de D ou encore la distance du point D au plan (ABC)*

Donc $d(D,(ABC))=h=\dfrac{10}{3}\times 3\times\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}.$

3) a) $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow AD=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}\\ \overrightarrow{BD}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow BD=\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}\\ \overrightarrow{CD}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow AD=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}\end{cases}\Rightarrow$ $AD=BD=CD$ *le point D est donc équidistant des points A, B et C alors c'est un point de l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC*

b) *On a :* $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-2\vec{j},\ \overrightarrow{AC}=2\vec{i}-2\vec{k}$ *et* $\overrightarrow{BC}=2\vec{j}-2\vec{k}$ *donc* $AB=AC=BC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Alors le triangle ABC est équilatéral.

D est point de l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC donc son projeté orthogonal sur le plan (ABC) est le centre de ce cercle qui est aussi le centre de gravité du triangle ABC car ce triangle est équilatéral.

Donc $\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right).$

c) $d(D,(ABC))=DH=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{3\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}.$

Exercice 3

1) $g(x) = F(1-\sin x)$. Posons $h(x) = 1-\sin x$ donc $g(x) = Foh(x)$.

h dérivable sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

F est une primitive de f sur $J =]0,2[$ donc dérivable sur J

En plus $h(I) \subset J$ (car $\forall x \in I, -1 < \sin x < 1 \Leftrightarrow -1 < -\sin x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-\sin x < 2$

Donc, d'après le théorème de la dérivabilité de la composée, $g = Foh$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = h'(x).F'(h(x)) = h'(x).f(h(x))$

$$= -\cos x.\frac{1}{\sqrt{2(1-\sin x)-(1-\sin x)^2}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{-\cos x}{|\cos x|} = \frac{-\cos x}{\cos x} = -1$$

car pour tout $x \in I, \cos x > 0$.

2) $\forall x \in I, g'(x) = -1 \Rightarrow$ Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, g(x) = -x + c$.

Or $g(0) = F(1-\sin 0) = F(1) = 0$ et $g(0) = -0 + c = c \Rightarrow c = 0$

En conclusion : $\forall x \in I, g(x) = -x$.

3) $F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$, $F\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $F\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

4) a) $\forall x \in]0,2[, H(x) = F(x) + F(2-x)$

La fonction $x \mapsto 2-x$ est dérivable sur $]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[, 2-x \in]0,2[$

En plus F est dérivable sur $]0,2[$ donc H est dérivable sur $]0,2[$

$\forall x \in]0,2[, H'(x) = F'(x) - F'(2-x) = f(x) - f(2-x) = 0$ (faites le calcul ...)

b) $\forall x \in]0,2[, H'(x) = 0$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,2[, H(x) = c$.

Or pour $x = 1$ on a $H(1) = 2F(1) = 0 = c$ d'où $\forall x \in]0,2[, H(x) = 0$.