Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

◉○◉○◉

4ème Sciences expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.

c) Drésser le tableau de variation de f.

d) Montrer que pour tout réel x, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $\mathbb{R}$, une seule solution α et que $1,3 < \alpha < 1,4$. (On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$)

3) Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, $u_{2p} \leq \alpha \leq u_{2p+1}$.

b) Etudier, suivant la parité de n, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

c) La suite (u_n) est-elle monotone ?

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

e) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha|$.

f) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

La droite D d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

La droite Δ d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

La droite δ d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe C.

1) Déterminer :

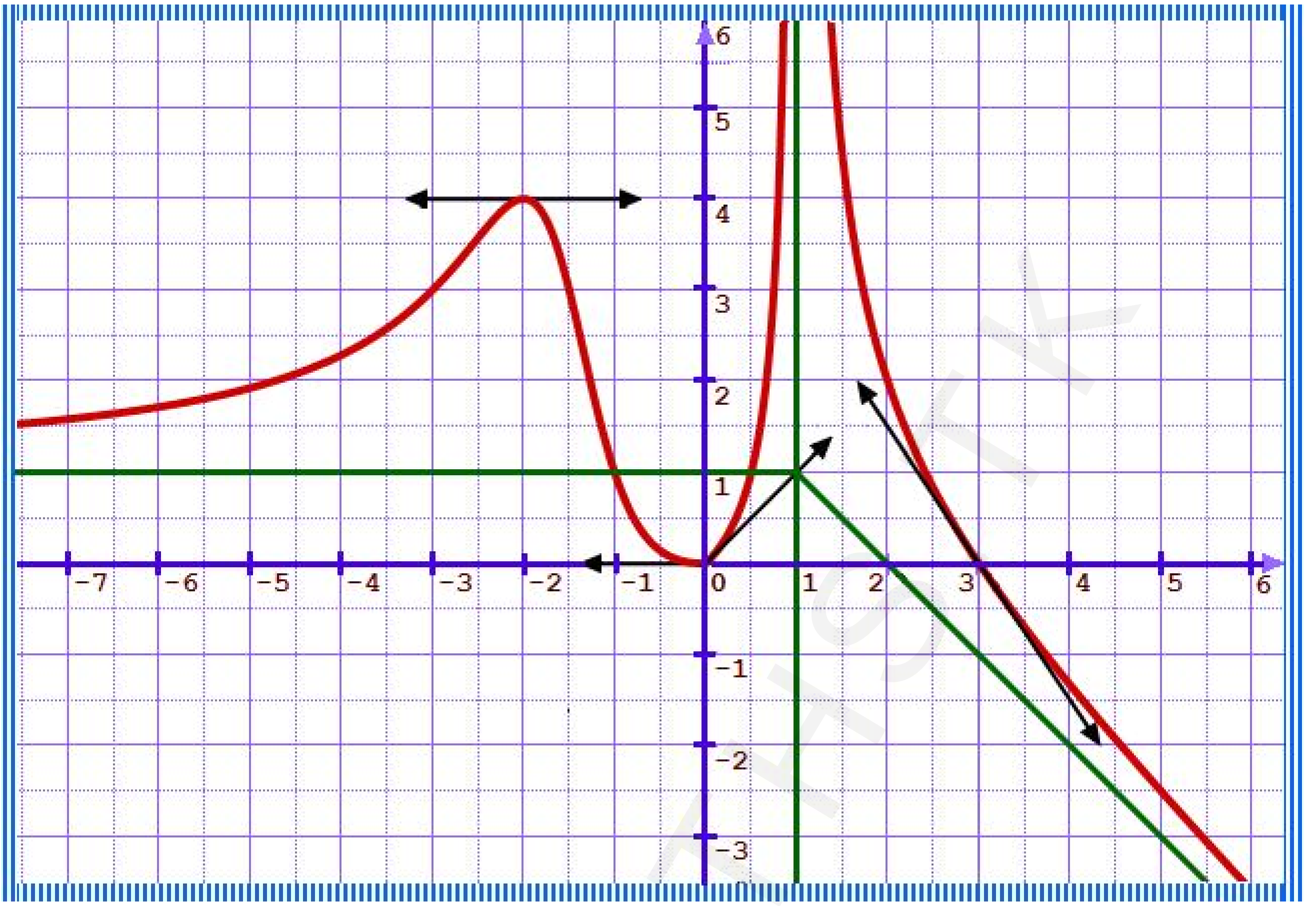
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)+x-2}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) $f'(-2)$ et $f'(3)$.

c) $f([-3,-1])$; $f(]-\infty,1[)$ et $fof([3,+\infty[)$.

2) Sachant que $f'(-3)=1$ et $f'(2)=-3$ déterminer $(fof)'(-3)$ et $(fof)'(2)$.

3) Drésser le tableau de variation de f.



Exercice 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

C le cercle de centre le point I d'affixe 1 et passant par le point B d'affixe 2.

Soit (E) l'équation : $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ où θ est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

1) a) Sans résoudre l'équation (E), Montrer que si z est une solution de (E) alors $|z-1|=1$.

b) En déduire que pour tout réel $\theta\in]0,\pi[$, les images des solutions de l'équation (E) appartiennent au cercle C.

2) a) Résoudre l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les solutions telles que $Im(z_1)>0$

On considère, dans la suite, les points M et N d'affixes respectives z_1 et z_2.

b) Montrer que $[MN]$ est un diamètre du cercle C.

c) Donner la forme exponentielle de z_1 et vérifier que $z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$.

d) Montrer que le quadratère $OMBN$ est un rectangle.

e) Déterminer en fonction de θ l'aire du rectangle $OMBN$.

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}$ donc pour $x > 0$ on aura

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 2-1=1.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}$ donc pour $x < 0$ on aura

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 2+1=3.$$

b) La fonction $x \mapsto 2+x^2$ est dérivable (fonction polynome) et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En plus $\sqrt{2+x^2} \neq 0$ pour tout réel x, il découle alors la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{\sqrt{2+x^2} - x.\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2+x^2}}}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^2} = -\frac{(2+x^2)-x^2}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}} = \frac{-2}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}.$$

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	1

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \Rightarrow 2+x^2 \geq 2$ et $\sqrt{2+x^2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow (2+x^2)\sqrt{2+x^2} \geq 2\sqrt{2}$ ce qui donne

$$0 < \frac{1}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ donc } 0 < \frac{2}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou encore } |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

$\begin{cases} g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et en particulier sur } [1,3;1,4] \\ g(1,3)\times g(1,4) \simeq 0,023\times(-0,103) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ L'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in]1,3;1,4[$

En plus g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (Car $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$)

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et par suite α est l'unique solution réelle de l'équation $g(x)=0$. Il en est de même pour $f(x)=x$ car $g(x)=0$ et $f(x)=x$ sont deux équations équivalentes et donc ont même ensemble de solutions.

3) a) Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} \le \alpha \le u_{2p+1}$.

<u>Initialisation:</u> Pour $p = 0$ on a $u_0 = 1 < 1,3 < \alpha$ or f décroissante donc $f(u_0) = u_1 \ge f(\alpha) = \alpha$ et finalement on a : $u_0 \le \alpha \le u_1$.

<u>Hérédité :</u> Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{2p} \le \alpha \le u_{2p+1}$ et montrons que $u_{2(p+1)} \le \alpha \le u_{2(p+1)+1}$ ou encore $u_{2p+2} \le \alpha \le u_{2p+3}$.

f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $u_{2p} \le \alpha \le u_{2p+1} \Rightarrow f(u_{2p}) \ge f(\alpha) \ge f(u_{2p+1})$ ou encore $u_{2p+1} \ge \alpha \ge u_{2p+2}$ et aussi pour la même raison $f(u_{2p+1}) \le f(\alpha) \le f(u_{2p+2})$ c'est à dire $u_{2p+2} \le \alpha \le u_{2p+3}$. D'où le résultat.

b) Si n est pair alors $n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n = u_{2p+1} - u_{2p} \ge 0$ d'après a).

Si n est impair alors $n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n = u_{2p+2} - u_{2p+1} \le 0$ car $u_{2p+2} = u_{2(p+1)} \le \alpha$ et $u_{2p+1} \ge \alpha$.

c) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+2} - u_{n+1}$ sont de signes contraires car n et $n+1$ sont de parités différentes donc $u_{n+1} - u_n$ ne garde pas un signe constant

D'où la suite (u_n) n'est pas monotone.

d) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $|f'(x)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis $|f(u_n) - f(\alpha)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ ou encore $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$ car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$.

e) <u>Initialisation:</u> Pour $n = 0$ on a $|u_0 - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 |1 - \alpha|$ car $u_0 = 1$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha|$ et montrons que

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} |1 - \alpha|.$$

On a $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha|$ et on sait que $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$

donc on obtient $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} |1 - \alpha|$.

f) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha| \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha| = 0 \text{ car } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in \left]-1,1\right[\end{cases} \Rightarrow$ La suite $(u_n - \alpha)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$ et puisque $u_n = (u_n - \alpha) + \alpha$ Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 2

1) a) ❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) = -\infty$ car $D : y = -x+2$ est une asymptote à C au $V(+\infty)$.

❖ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ car $\Delta : y = 1$ est une asymptote à la courbe C au $V(-\infty)$.

❖En observant la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'asymptote verticale δ, si $M(x, f(x)) \in \mathcal{C}$

et si $x \to 1$ alors $y \to +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

❖D : $y = -x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au $V(+\infty)$ et pour $x > 1$ la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de D donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + x - 2 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x) + x - 2} = +\infty$.

❖La courbe $\mathcal{C}$ admet, à gauche (resp. à droite), au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale (resp. de coefficient directeur 1) donc f est dérivable à gauche (resp. à droite) en 0 et $f'_g(0) = 0$ (resp. $f'_d(0) = 1$), ce que l'on peut traduire par

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_g(0) \left(\text{resp. } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_d(0) \right).$$

Ce qui donne finalement $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

b) $f'(-2) = 0$ et $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$.

c) $f([-3,-1]) = [1,4]$; $f(]-\infty,1[) = [0,+\infty[$

$f([3,+\infty[) =]-\infty,0]$ et $f(]-\infty,0]) = [0,4]$ donc $fof([3,+\infty[) = [0,4]$.

2) $(fof)'(-3) = f'(-3) \times f'(f(-3)) = 1 \times f'(3) = -\dfrac{3}{2}$.

$(fof)'(2) = f'(2) \times f'(f(2)) = -3 \times f'(2) = (-3)^2 = 9$.

3)

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$0 \parallel 1$	$+$	$\parallel$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3

1) a) z solution de $(E) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = e^{2i\theta}$ donc $|z - 1| = 1$.

b) Soit M un point du plan d'affixe z.

z solution de $(E) \Leftrightarrow |z - 1| = 1 \Leftrightarrow IM = 1 = IB \Leftrightarrow M$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

2) a) $\Delta = 4 - 4(1 - e^{2i\theta}) = 4e^{2i\theta} = (2e^{i\theta})$ donc les solutions de sont :

$\dfrac{2 + 2e^{i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = z_1$ car $\sin\theta \geq 0$ pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$.

$z_2 = \dfrac{2 - 2e^{i\theta}}{2} = 1 - e^{i\theta}$.

Autrement : $(z-1)^2 - (e^{i\theta})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - e^{i\theta})(z - 1 + e^{i\theta}) = 0 \Leftrightarrow ....$

b) On sait dèja d'après 1)a) que $M \in \mathcal{C}$ et $N \in \mathcal{C}$.

En plus $\dfrac{z_M + z_N}{2} = 1 = z_I$ *c-à-d* $M * N = I$ *donc* $[MN]$ *est un diamètre de* $\mathscr{C}$

c) $z_1 = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ *c'est la forme exponentielle de* z_1

car $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ *car* $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$z_2 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$.

d) $\begin{cases} Aff(\overrightarrow{OM}) = z_1 \text{ et } Aff(\overrightarrow{NB}) = 2 - (1 - e^{i\theta}) = 1 + e^{i\theta} = z_1 \text{ donc } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NB} \\ \dfrac{Aff(\overrightarrow{OM})}{Aff(\overrightarrow{OB})} = \dfrac{z_1}{2} \notin \mathbb{R} \text{ car } \theta \in]0, \pi[\Rightarrow Im(z_1) = \sin\theta \neq 0 \text{ donc } O, B \text{ et } M \text{ non alignés} \end{cases}$

Donc OMBN est un parallélogramme.

En plus $[MN]$ *est un diamètre de* $\mathscr{C}$ *et* $O \in \mathscr{C}$ *donc* $\widehat{MON}$ *est un angle droit*

D'où OMBN est un rectangle.

e) *L'aire de OMBN* $= OM \times ON = |z_1||z_2| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\theta$.

WWW.SIGMATHS.TK