Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

$4^{ème}$ Sciences expérimentales

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit la fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x - \frac{3}{2}x + 1$.

1) *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) *Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :* $-\frac{3}{2} \le \frac{f(x)}{x} \le -\frac{3}{2} + \frac{2}{x}$.

b) *En déduire la limite de* $\frac{f(x)}{x}$ *quand x tend vers* $+\infty$.

3) a) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une seule solution* $\alpha \in \left]1, \frac{4}{3}\right[$.

b) *Exprimer $\cos\alpha$ en fonction de α et vérifier que* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}$.

4) *Pour tout réel x, on pose $t = x - \alpha$*

a) *Vérifier que pour tout réel $x \ne \alpha$, on a :* $\frac{f(x)}{x-\alpha} = \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)\frac{\cos t - 1}{t} - \frac{3}{2} - \sin\alpha\frac{\sin t}{t}$.

on note g(t) cette dernière expression.

b) *Justifier rigoureusement pourquoi* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{x-\alpha} = \lim\limits_{t\to 0} g(t)$?

c) *Vérifier finalement que* $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{x-\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}\right)$.

Exercice 2

On donne la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1) a) *Vérifier que pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(1+2u_n)}$.

b) *Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a :* $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

c) *Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).*

d) *Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.*

2) a) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) Retrouver alors la limite de (u_n).

Exercice 3

Considérons le nombre complexe $\omega = \sqrt{6}(1+i) + \sqrt{2}(1-i)$.

1) Donner la forme algébrique de ω.

2) Calculer ω^2 et donner sa forme trigonométrique.

3) Donner alors la forme trigonométrique de ω.

4) Déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel n pour que ω^n soit réel.

Exercice 4

Soit z un nombre complexe et $M(x,y)$ son image dans le plan complexe.

On pose $Z = |z|^2 - 2z + 3\overline{z}$. On pose $Z = X + iY$ où X et Y sont deux réels

1) Calculer X et Y en fonction de x et y.

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.

3) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire.

4) En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Correction du devoir

Exercice 1

1) Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}x + 2.$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -\frac{3}{2}x \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{2}x\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq -\frac{3}{2}x + 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2) a) Pour tout réel $x > 0$, $-\frac{3}{2}x \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{f(x)}{x} \leq -\frac{3}{2} + \frac{2}{x}.$

b) $$\begin{cases} \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ -\frac{3}{2} \leq \frac{f(x)}{x} \leq -\frac{3}{2} + \frac{2}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{x}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{3}{2} \quad (\text{Th. des gendarmes})$$

3) a) $f(1) = \cos 1 - 1{,}5 + 1 \approx 0{,}04$ et $f\left(\frac{4}{3}\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\right) - 2 + 1 \approx -0{,}76$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } \left[1,\frac{4}{3}\right] \\ f(1) \times f\left(\frac{4}{3}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet au moins une solution } \alpha \\ \text{telle que } 1 < \alpha < \frac{4}{3}. \end{array} \right.$$

D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin x - \frac{3}{2} \leq 1 - \frac{3}{2} < 0$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et par suite α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha - \frac{3}{2}\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2}\alpha - 1.$

$\alpha \in \left]1,\frac{4}{3}\right[\subset \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin\alpha > 0$ donc $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)^2} = \sqrt{-\frac{9}{4}\alpha^2 + 3\alpha}$

ou encore $\sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{4}\left(-\alpha^2 + \frac{4}{3}\alpha\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4\alpha - 3\alpha^2}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\sqrt{4\alpha - 3\alpha^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}.$

4) a) Pour $x \neq \alpha$, $x - \alpha = t \Leftrightarrow x = t + \alpha$ et on a :

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = \frac{1}{t}\left(\cos(t+\alpha) - \frac{3}{2}(t+\alpha) + 1\right) = \frac{1}{t}\left(\cos t\cos\alpha - \sin t\sin\alpha - \frac{3}{2}t - \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(\left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)\cos t - \sin t\sin\alpha - \frac{3}{2}t - \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)\right) \quad \text{car } \cos\alpha = \frac{3}{2}\alpha - 1$$

$$=\frac{1}{t}\left(\left(\frac{3}{2}\alpha-1\right)(\cos t-1)-\sin t\sin\alpha-\frac{3}{2}t\right)=\left(\frac{3}{2}\alpha-1\right)\frac{\cos t-1}{t}-\frac{3}{2}-\sin\alpha\frac{\sin t}{t}.$$

b) Supposons que g admet une limite en 0 notée l

On a : $\lim\limits_{x\to\alpha}(x-\alpha)=0$ et $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=l$ donc d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions on aura $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x-\alpha)=l$ ou encore $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}=l.$

c) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos x-1}{t}=0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ donc $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=-\frac{3}{2}-\sin\alpha$ ou encore

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}=-\frac{3}{2}-\sin\alpha=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4\alpha-3\alpha^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4\alpha-3\alpha^2}\right).$$

Exercice 2

1) a) $\frac{3}{2}-\frac{3}{2(1+2u_n)}=\frac{3(1+2u_n)-3}{2(1+2u_n)}=\frac{3+6u_n-3}{2(1+2u_n)}=\frac{6u_n}{2(1+2u_n)}=\frac{3u_n}{1+2u_n}=u_{n+1}.$

b) **Initialisation** : Pour $n=0$, $u_0=\frac{1}{2}\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ vrai.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $1<u_n<\frac{1}{2}$ et montrons que $1<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}<u_n<1\Leftrightarrow 1<2u_n<2\Leftrightarrow 2<1+2u_n<3\Leftrightarrow 4<2(1+2u_n)<6\Leftrightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{2(1+2u_n)}<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{3}{2(1+2u_n)}<\frac{3}{4}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}<-\frac{3}{2(1+2u_n)}<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{4}<\frac{3}{2}-\frac{3}{2(1+2u_n)}<1$$

Or $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ donc $\frac{1}{2}<u_{n+1}<1.$

c) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{1+2u_n}-u_n=\frac{3u_n-u_n-2u_n^{\,2}}{1+2u_n}=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}>0$ car $0<u_n<1.$

Donc la suite (u_n) est croissante.

d) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc (u_n) est convergente posons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l.$

$$\begin{cases}u_{n+1}=f(u_n)\text{ avec } f:x\mapsto\dfrac{3x}{1+2x}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] & \Rightarrow f(l)=l\\ f\text{ continue sur }\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subset\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.\end{cases}$$

$$f(l)=l\Leftrightarrow 3l=l+2l^2\Leftrightarrow 2l(1-l)=0\Rightarrow l=1\text{ car }l\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

4) a) $|u_{n+1}-1|=\left|\frac{3u_n}{1+2u_n}-1\right|=\left|\frac{3u_n-1-2u_n}{1+2u_n}\right|=\frac{|u_n-1|}{1+2u_n}$

$$\frac{1}{2}<u_n\Rightarrow 1<2u_n\Rightarrow 2<1+2u_n\Rightarrow\frac{1}{1+2u_n}<\frac{1}{2}\Rightarrow|u_{n+1}-1|=\frac{|u_n-1|}{1+2u_n}<\frac{1}{2}|u_n-1|.$$

b) Pour $n=0$ on a : $|u_0-1|=\frac{1}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^1$ ce qui est vrai.

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et montrons que $|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

$|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2}|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ or $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|u_n-1|$ donc $|u_{n+1}-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

c) $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0 \text{ car } \frac{1}{2}\in\left]-1,1\right[\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\text{la } (u_n-1) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0\\ \text{Or } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=(u_n-1)+1\\ \text{Donc la suite } (u_n) \text{ est conergente et } \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1\end{array}\right.$

Exercice 3

1) $w=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

2) $w^2=\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\right]+2i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

$$=\left(8+2\sqrt{12}-8+2\sqrt{12}\right)+2i(6-2)=8\sqrt{3}+8i=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[16,\frac{\pi}{6}\right].$$

3) w est une racine carrée de w^2 donc $w=\left[4,\frac{\pi}{12}\right]$ ou $w=\left[4,\frac{13\pi}{12}\right]$

Or $Re(w)=\sqrt{6}+\sqrt{2}>0$ donc $w=\left[4,\frac{\pi}{12}\right]$.

4) $w=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}.$

Exercice 4

1) $Z=|z|^2-2z+3\bar{z}=x^2+y^2-2(x+iy)+3(x-iy)=(x^2+y^2+x)-5iy.$

2) $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -5y=0\Leftrightarrow y=0$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que Z soit réel est la droite $(O,\vec{i})$.

3) Z imaginaire $\Leftrightarrow x^2+y^2+x=0\Leftrightarrow x^2+x+y^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

C'est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

4) $\arg(Z)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\Leftrightarrow Z$ imaginaire et $Im(Z)>0\Leftrightarrow M(z)\in\mathscr{C}\cap(y>0)$ où $y>0$ représente l'inéquation du demi plan $\{M(x,y)$ du plan tel que $y>0\}$.