Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°2

Classe : 3ème ScExp

Mai 2017

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (8 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine D_f.

c) En déduire l'équation de l'asymptote verticale Δ à la courbe C.

2) Déterminer les trois réels a, b et c tels que : pour tout réel $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

3) a) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à la courbe C.

b) Etudier la position de C par rapport à D.

4) a) Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

5) Montrer que le point $I(1, -2)$ est un centre de symétrie pour la courbe C.

6) Tracer Δ, D et C.

7) Soit a un réel superieur à 2 et T_a la tangente à C au point d'abscisse a.

a) Montrer que T_a coupe Δ au point $A\left(1, \dfrac{-2a+4}{a-1}\right)$.

b) Montrer que T_a coupe D au point $B(2a-1, 2a-4)$.

c) Montrer que pour tout réel $a \geq 2$, l'aire du triangle IAB garde une valeur constante que l'on précisera.

8) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par : $g(x) = f(|x|)$.

a) Vérifier que g est une fonction paire.

b) Tracer la courbe C' de g dans le même repère que C.

Exercice 2 (4 points)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $P\left(1; 1; \dfrac{3}{4}\right)$, $Q\left(0; \dfrac{1}{2}; 1\right)$ et $R\left(1; 0; -\dfrac{5}{4}\right)$.

1) Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

2) Démontrer que le triangle PQR est rectangle en P.

3) a) Donner une équation cartésienne du plan (PQR).

b) En déduire les composantes d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (PQR).

4) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et perpendiculaire au plan (PQR).

5) Montrer que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point $K\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.

Exercice 3 (4 points)

Un sac contient cinq jetons verts (numérotés de 1 à 5) et quatre jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

a) Combien y-a-t-il de tirages possibles.

b) Combien y-a-t-il de tirages de 3 jetons verts.

c) Combien y-a-t-il de tirages qui comportent 1 seul jeton vert.

d) Combien y-a-t-il de tirages qui comportent au plus 2 jetons verts.

2) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré après chaque tirage.

Reprendre dans ce cas les questions a) b) c) et d).

Exercice 4 (4 points)

Soit la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{9u_n - 8}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n on a : $2 < u_n < 4$.

2 a) Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 3}$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont $-$ on précisera la raison et le premier tèrme.

b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n.

.