

Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°2**Classe : 4^{ème} ScExp**

Mai 2017

ProfesseurDhaouadi
Nejib**Exercice 1 (7 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + xe^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe C .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f' et en déduire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que la courbe C admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

d) Dresser le tableau de variation de f .

3) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe C où la tangente T est parallèle à la droite D .

4) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique $\alpha \in]0,65; 0,66[$.

5) Tracer D , T et C .

6) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe C , l'asymptote D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

7) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + x^n e^{-x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul, par $u_n = \int_0^1 [f_n(x) - x] dx$.

a) Déterminer u_1 .

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, 0)$; $B(2, 1, 3)$; $C(3, 3, 1)$; $D(5, -3, -3)$ et $E(-3, 7, 3)$.

- 1) Justifier que les points A , B et C déterminent un plan P et donner une équation de ce plan.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite (DE) .
- 3) Montrer que P est le plan médiateur du segment $[DE]$.
- 4) a) Calculer l'aire du triangle BCD .
b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ et déduire la distance du point A au plan BCD .

Exercice 3 (5 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Une usine est spécialisée dans la fabrication d'un composant électronique; un contrôle de qualité a montré que chaque composant électronique produit par l'usine pouvait présenter deux types de défaut : un défaut d_1 avec une probabilité égale à 0,02 et un défaut d_2 avec une probabilité égale à 0,05. Le contrôle a montré aussi que les défauts étaient indépendants. Un composant est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

Un composant électronique est tiré au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

A : « Le composant tiré présente le défaut d_1 ».

B : « Le composant tiré présente le défaut d_2 ».

D : « Le composant tiré présente au moins l'un des deux défauts ».

- 1) a) Déterminer $p(A \cap B)$.
b) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,069.
- 2) On considère que le nombre de composants électroniques fabriqués est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants. Un commerçant commande un lot de 50 composants électroniques de l'usine. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 50 composants associe le nombre de composants électroniques défectueux.
 - a) Définir la loi de probabilité de X .
 - b) Déterminer la probabilité qu'il ait au moins deux composants électroniques défectueux dans ce lot.
 - c) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat trouvé.
- 3) La variable aléatoire Y qui à tout composant électronique fabriqué par l'usine associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,001.
 - a) Calculer la probabilité qu'un tel composant ait une durée de vie comprise entre 500 et 1000 jours.
 - b) Calculer la probabilité qu'un tel composant dure plus que 1500 jours sachant qu'il a duré plus que 1000 jours.

Exercice 4 (4 points)

Lors d'un essai d'efficacité d'un produit fongicide, on a relevé le nombre y_i de plants malades pour diverses concentrations de produit de traitement x_i .

x_i (en g / l)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_i (nb. plants malades)	72	45	34	23	15	9

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1) Pour chacune des valeurs y_i on pose $z_i = 0,4343 \times \ln y_i$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3
z_i	1,857					

b) Représenter le nuage de points de la série statistique (X, Z) (Voir feuille annexe)

Un ajustement linéaire entre X et Z est-elle justifié?

2) a) Calculer $\bar{X}$, $\bar{Z}$, $\sigma(X)$, $\sigma(Z)$ et $\text{cov}(X, Z)$

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Z) et interpréter ce résultat.

3) a) Donner une équation de la droite de régression de Z en X .

b) En déduire y en fonction de x où x désigne la concentration et y le nombre de plants malades associés.

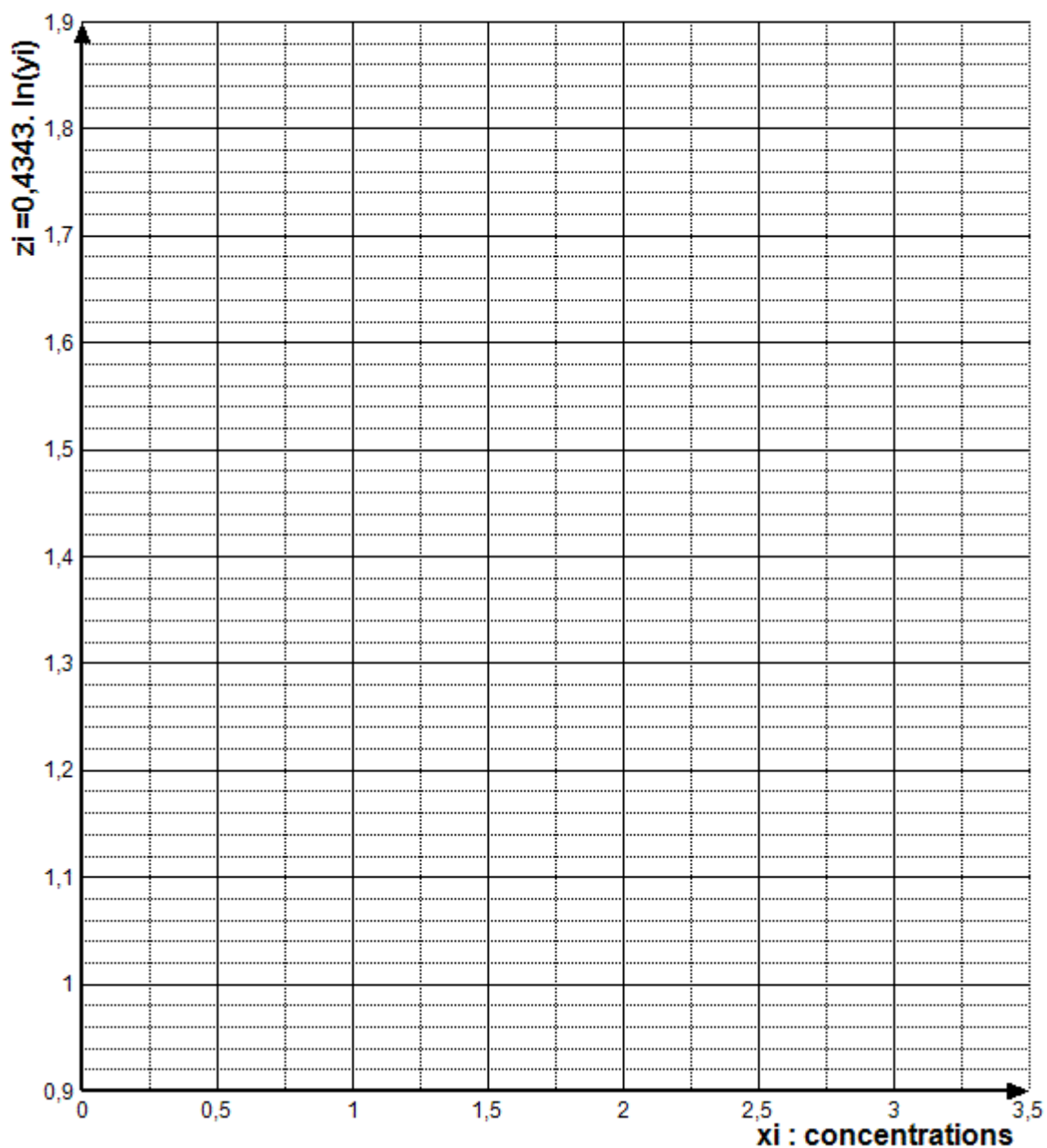
4) Estimer le nombre de plants malades pour une concentration de produit de 3,5.



All rights reserved

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom de l'élève : Classe :



Correction du devoir

Exercice 1

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (-x)e^{-x} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-Xe^x) = 0$ donc la droite $D : y = x$ est une asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + xe^{-x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-x}) = +\infty$.

2) a) $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + (1-x)e^{-x}$ et $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$.

b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+\infty$	$1 - \frac{1}{e^2}$	1

$1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,86$ est un minimum absolu pour f' donc pour tout réel x , $f'(x) \geq 1 - \frac{1}{e^2} > 0$

c) f'' s'annule en 2, en changeant de signe donc le point $I\left(2, f(2) = 2 + \frac{2}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe C .

d)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) La tangente T à la courbe C au point A d'abscisse x est parallèle à D si et seulement si $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + (1-x)e^{-x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc $A\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$.

4) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ alors 1 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R} \Rightarrow$ il existe et unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 1$. En plus $f(0,65) \approx 0,989 < f(\alpha) = 1 < f(0,66) \approx 1,001 \Rightarrow 0,65 < \alpha < 0,66$ car f est strictement croissante.

5) $1 + \frac{1}{e} \approx 1,37$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ la courbe C admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O, \vec{j})$. Traçage : voir figure ci-dessous

$$6) I = \int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx \quad \begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \Leftarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$$

L'aire de la région donnée est égale à : $4(1 - 2e^{-1}) \text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned} 7) a) u_1 &= \int_0^1 (f_1(x) - x) dx \\ &= \int_0^1 (f(x) - x) dx \\ &= 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \forall x \in [0, 1]; 0 \leq e^{-x} \leq 1 \\ \Rightarrow \forall x \in [0, 1]; 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \\ \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \end{aligned}$$

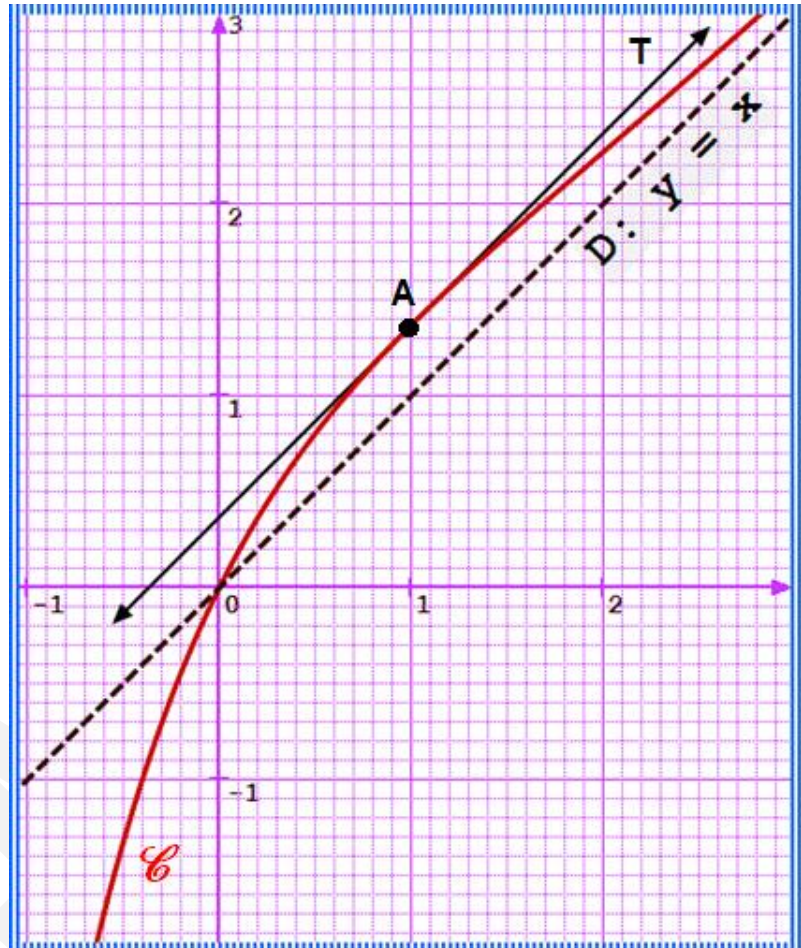
$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc d'après le théorème
des gendarmes la suite
(u_n) est convergente

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



Exercice 2

$$1) \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ donc les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}$$

$\Rightarrow A, B$ et C forment un plan P . Ce plan admet comme vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$$D'où M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -4(x-1) + 5(y-2) + 3(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 5y + 3z - 6 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{P : 4x - 5y - 3z + 6 = 0}$$

2) la droite (DE) passe par D(5, -3, -3) et de vecteur directeur $\overrightarrow{DE} = -8\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}$

$$\text{Alors (DE) : } \begin{cases} x = 5 - 8\alpha \\ y = -3 + 10\alpha \\ z = -3 + 6\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

3) Soit I le milieu de $[DE]$, on a $I(1, 2, 0) \Rightarrow I = A$

en plus $\overrightarrow{DE}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{DE} = 2\vec{n}$) $\Rightarrow (DE) \perp P$

$(DE) \perp P$ et $D * E = A \in P$ donc P est le plan médiateur du segment $[DE]$.

4) a) L'aire S du triangle $BCD = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-20)^2 + 0^2 + (-10)^2} = \frac{\sqrt{500}}{2} = 5\sqrt{5}$

b) Le volume V du tétraèdre $ABCD = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{25}{3}$.

On note d la distance du point A au plan (BCD) .

On sait que $V = \frac{1}{3} S \times d \Leftrightarrow d = \frac{3V}{S} = \frac{25}{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Exercice 3

1) a) Les événements A et B sont indépendants

Donc $p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,02 \times 0,05 = 0,001$.

b) $p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$.

2) a) Le choix des 50 composants est assimilé à des tirages identiques et indépendants

X associe à chaque tirage le nombre de composants défectueux (nbre de succès)

Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = p(D) = 0,069$

Donc $\forall k \in \{0, 1, \dots, 50\}; p(X = k) = C_{50}^k p^k (1-p)^{50-k} = C_{50}^k (0,069)^k (0,931)^{50-k}$.

b) $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$
 $= 1 - (0,931^{50} + 50 \times 0,069 \times 0,931^{49}) \approx 0,868$.

c) $E(X) = np = 50 \times 0,069 = 3,45$.

Dans un lot de 5000 composants il y a, en moyenne, 345 composants défectueux.

3) a) $p(500 \leq Y \leq 1000) = e^{-500 \times 0,001} - e^{-1000 \times 0,001} = e^{-0,5} - e^{-1} \approx 0,239$.

b) $p((Y \geq 1500) / (Y \geq 1000)) = \frac{p((Y \geq 1500) \cap (Y \geq 1000))}{p(Y \geq 1000)} = \frac{p(Y \geq 1500)}{p(Y \geq 1000)}$
 $= \frac{e^{-0,001 \times 1500}}{e^{-0,001 \times 1000}} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5+1} = e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607$

Exercice 4

1) a)

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3
z_i	1,857	1,653	1,531	1,362	1,176	0,954

b) (Voir figure ci-dessous)

Le nuage de points a une forme allongée autour d'une droite donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Z et par suite on peut faire un ajustement linéaire.

2) a) $\bar{X} = 1,75$; $\bar{Z} = 1,422$; $\sigma(X) = 0,854$; $\sigma(Z) = 0,299$ et $\text{cov}(X, Z) = -0,255$.

b) Le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Z) est :

$$r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)} \approx -0,997$$

$$|r| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc il y a une forte corrélation linéaire entre } X \text{ et } Z$$

3) a) $z = -0,349x + 2,034$

b) $0,4343 \ln y = -0,349x + 2,034 \Leftrightarrow \ln y = \frac{-0,349x + 2,034}{0,4343} = -0,804x + 4,683$

$$\Leftrightarrow y = e^{-0,804x + 4,683}$$

4) Pour $x = 3,5$; $y = e^{-0,804 \times 3,5 + 4,683} \approx 6,5$

Le nombre de plants malades pour une concentration de produit de 3,5 est presque égal à 6 (ou 7) plants

