Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 4ème ScExp

Avril 2017

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité 3cm sur $(O,\vec{i})$, 2cm sur $(O,\vec{j})$.)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-1+\ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $g(1)$ et puis donner le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe C.

Y a-t-il une autre asymptote à C ? Si oui, donner son équation.

3) a) Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Drésser le tableau de variation de f.

4) a) Etudier la position de l'asymptote D par rapport à la courbe C.

b) Tracer C et D.

5) Calculer, en cm^2, l'aire de la région du plan délimitée par la courbe C, l'asymptote D et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par : $I_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$.

1) A l'aide d'une integration par parties, calculer I_1.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$.

b) Calculer I_2.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $I_n\geq 0$

et puis déduire que $I_n\leq\dfrac{e^3}{n+1}$.

b) Etudier alors la convergence de la suite (I_n).

Exercice 3

Le secteur de production d'une entreprise est composé de trois catégories de personnel :

- *les ingérieurs;*
- *les opérateurs de production;*
- *les agents de maintenance.*

Il y a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :

- *M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance »;*
- *O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production »;*
- *I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur »;*
- *F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».*

1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2) Calculer la probabilité d'interroger :

a) un agent de maintenance;

b) une femme agent de maintenance;

c) une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue; des études ont montré que sur une journée :

- *la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclanche est égale à 0,002.*
- *la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclanche pas est égale à 0,003.*
- *la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.*

On note :

- *A l'événement : « l'alarme se déclanche »;*
- *P l'événement : « une panne se produit »;*

1) Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclanche est égal à 0,037.

2) Calculer la probabilité que l'alarme se déclanche.

3) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclanche.

.

Exercice 1

1) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

b) $g(1) = 0$ et g croissante sur $]0,+\infty[$ donc

$0 < x \le 1 \Rightarrow g(x) \le 0$ et $x \ge 1 \Rightarrow g(x) \ge 0$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite $D : y = x-1$ est une asymptote à C

On a aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ la droite $(O,\vec{j})$ est une asymptote à la courbe C.

3) a) $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

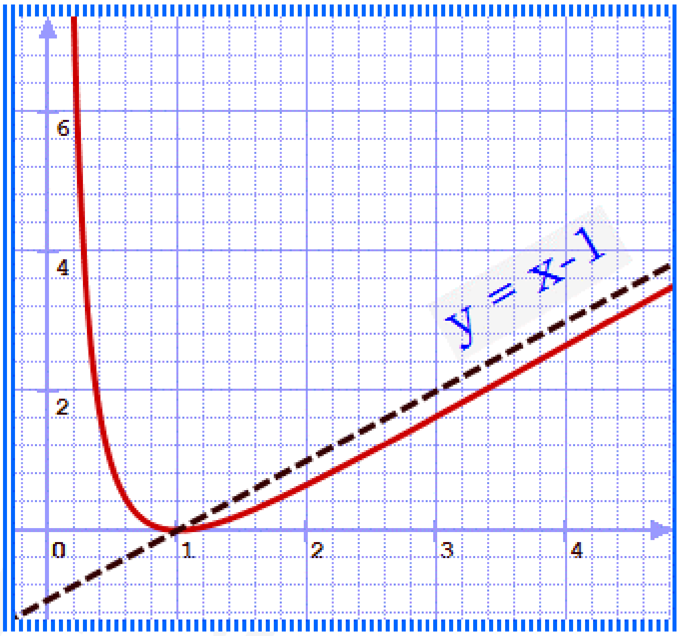
b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-1) = -\dfrac{\ln x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x-1)$	$+$	0	$-$
Positions de C par rapport à D	C au dessus de D		C au dessous de D

b) Voir figure



5) a)

$$\int_1^e ((x-1) - f(x))dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

$L'aire = 0,5 \times (2cm \times 3cm) = 3cm^2.$

Exercice 2

1) $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \Leftarrow v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$ donc

$$I_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}.$$

2) a) $I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx.$ On pose

$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)\dfrac{1}{x}(\ln x)^n \\ v'(x) = x^2 \quad \Leftarrow v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$ donc

$$I_{n+1} = \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n \Leftrightarrow 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3.$$

b) $n = 1 \Rightarrow 3I_2 + 2I_1 = e^3 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^3 - 2I_1}{3}$

Ce qui donne $I_2 = \dfrac{5e^3 - 2}{27}.$

3) a) $\forall x \in [1,e],\ x^2(\ln x)^n \geq 0$

$\Rightarrow \int_1^e x^2(\ln x)^n dx \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

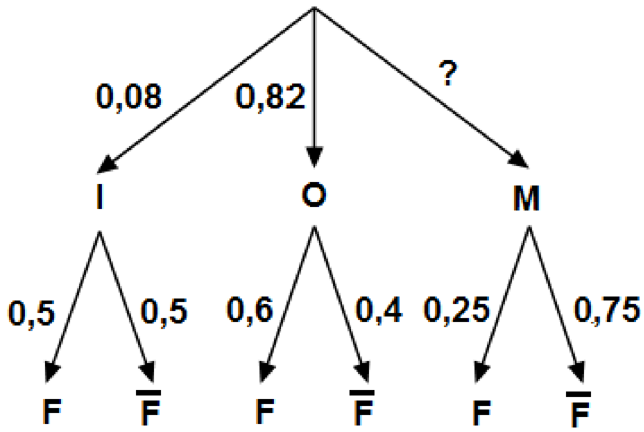
$(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1} \leq e^3$ car $I_{n+1} \geq 0$ donc $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^3}{n+1} = 0$

donc la suite (I_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

Partie A- 1)



2) a) Les événements I, O et M forment un système complet donc p(I)+p(O)+p(M)=1

$\Leftrightarrow p(M) = 1 - 0,08 - 0,82 \Rightarrow \boxed{p(M) = 0,1}$

b) $p(M \cap F) = p(M) \times p(F/M) = 0,1 \times 0,25 = 0,025$

c) D'après la formule des probabilités totales on a : $p(F) = p(I \cap F) + p(O \cap F) + p(M \cap F)$

Donc $p(F) = 0,08 \times 0,5 + 0,82 \times 0,6 + 0,025 = 0,557$

Partie B

Données :

$p(\overline{P} \cap A) = 0,002$, $p(P \cap \overline{A}) = 0,003$ et $p(P) = 0,04$

1) D'après la formule des probabilités totales on a : $p(P \cap A) + p(P \cap \overline{A}) = p(P)$

Donc $p(P \cap A) = p(P) - p(P \cap \overline{A}) = 0,037$

2) On aussi $p(A) = p(P \cap A) + p(\overline{P} \cap A)$ donc $p(A) = 0,037 + 0,002 = 0,039$.

3) $p(P/A) = \dfrac{p(P \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0,037}{0,039} = \dfrac{37}{39} \simeq 0,958$

.