

Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 4^{ème} ScExp

Avril 2017

Professeur

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1 (8 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 3cm).

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note C sa courbe représentative dans le plan P .

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

b) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

4) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$.

5) a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe C (on précisera la demi tangente au point d'abscisse 0)

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$ et pour tout entier non nul n on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$$

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2) a) Calculer I_1 .

b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier non nul n , on a : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) En déduire I_2 , I_3 et I_4 .

3) a) Montrer que pour tout entier non nul n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

b) Etudier alors la convergence de (I_n) .

4) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et déduire la limite de nI_n .

Exercice 3 (7points)

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ces stages ont lieu dans la même plage horaire; leurs thèmes sont la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que:

- ❖ La magie a été choisie par la moitié des enfants et 20% des adultes;
- ❖ 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10% des enfants.

1) Recopier et compléter le tableau suivant:

	Magie	Théâtre	Photo	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage.

On pourra utiliser les notations suivantes:

- A est l'événement «la personne appelée est un adulte»;
- M est l'événement «la personne appelée a choisi la magie»;
- T est l'événement «la personne appelée a choisi le théâtre»;
- N est l'événement «la personne appelée a choisi la photo numérique».

2) Construire un arbre pondéré.

3) a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?

b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo, sachant que c'est un adulte ?

c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre ?

4) Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est 0,32.

5) Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison? Justifier votre réponse.

All rights reserved

Exercice 1

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln X}{X-1} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

2) a) Soit $t \geq 0$, $\begin{cases} \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1-1+t^2}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \geq 0 \Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 = \frac{1-1-t+t+t^2-t^2-t^3}{1+t} = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \end{cases}$

b) Pour $x \geq 0$ on a : $\forall t \in [0, x], 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \Rightarrow \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt$

$\Leftrightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq \left[t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3) a) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (*)
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ on a : } -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Donc f dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

4) a) Soit $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{1-1-t}{(1+t)^2} = \frac{-t}{(1+t)^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$ pour $t \geq 0$.

b) Soit $x \geq 0$ on a $\forall t \in [0, x], \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

Donc $\left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x} + 1 \leq \ln(1+x)$ ou encore $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$.

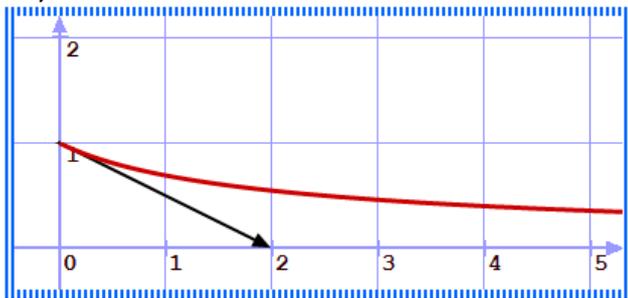
5) a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right)$.

b) $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = \int_0^x \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} \right) dt = -\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2} dt < 0$ car $x > 0$ et $\frac{t}{(1+t)^2} > 0$ pour $t > 0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$ -
$f(x)$	1 0

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{X} = 0 \times 1 = 0$

c)



Exercice 2

1) a) $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n (1 - \ln x)$
 Or $x \in [1, e] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$ donc $(\ln x)^n \geq 0$
 et $1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e ((\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n) dx \leq 0$
 \Rightarrow La suite (I_n) est décroissante.

2) a) $I_1 = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} (\ln x)^n dx$

On pose $\begin{cases} u(t) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^n \Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \end{cases}$

$$I_n = \left[\frac{x}{n+1} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

$$= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

Donc $(n+1)I_n = e - I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = -2e + 6$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e + 6) = 9e - 24$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1, e], (\ln x)^n \geq 0$
 $\Rightarrow I_n \geq 0$ donc $I_{n+1} = e - (n+1)I_n \geq 0$

D'où $I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{La suite } (I_n) \\ \text{est convergente} \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \end{cases}$

4) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n = e - nI_n - I_n$

$$\Leftrightarrow nI_n + (I_{n+1} + I_n) = e$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, nI_n = e - (I_{n+1} + I_n)$$

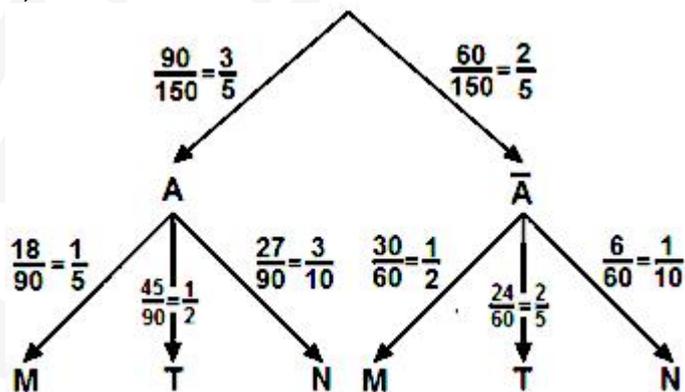
$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$ donc la suite (nI_n)
 est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e$

Exercice 3

1)

	Magie	Théâtre	Photo	Total
Adultes	18	45	27	90
Enfants	30	24	6	60
Total	48	69	33	150

2)



3) a) $p(\bar{A}) = \frac{150 - 90}{150} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $p(N | A) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$

c) $p(T \cap A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,3$

4) $p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap \bar{A})$
 $= p(A)p(M | A) + p(\bar{A})p(M | \bar{A})$
 $= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3+5}{25} = \frac{8}{25} = 0,32 = \frac{48}{150}$.

5) $p(\bar{A} | M) = \frac{p(M \cap \bar{A})}{p(M)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{8} = \frac{5}{8} = 0,625$

Le directeur a presque raison car $\frac{2}{3}$ est proche de 0,625.