Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de controle n°3

Classe : 4ème ScExp

Mars 2017

Professeur

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est définie sur le domaine $D = [-2, 2]$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 et à gauche en 2 et interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-2, 2[$ et que pour tout réel $x \in]-2, 2[$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2} - x}.$$

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer $\mathscr{C} \cap (O, \vec{i})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4) Tracer T et $\mathscr{C}$.

Exercice 2

Dans la figure ci-dessous on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ ainsi que les tangentes ou les demi tangentes aux points d'abscisses -1, 1 et 3. Les droites d'équations $x = 4$, $y = -1$ et $y = -2x - 1$ sont des asymptotes à $\mathscr{C}$.

En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Etudier la dérivabilité de f

a) à gauche et à droite en -1.

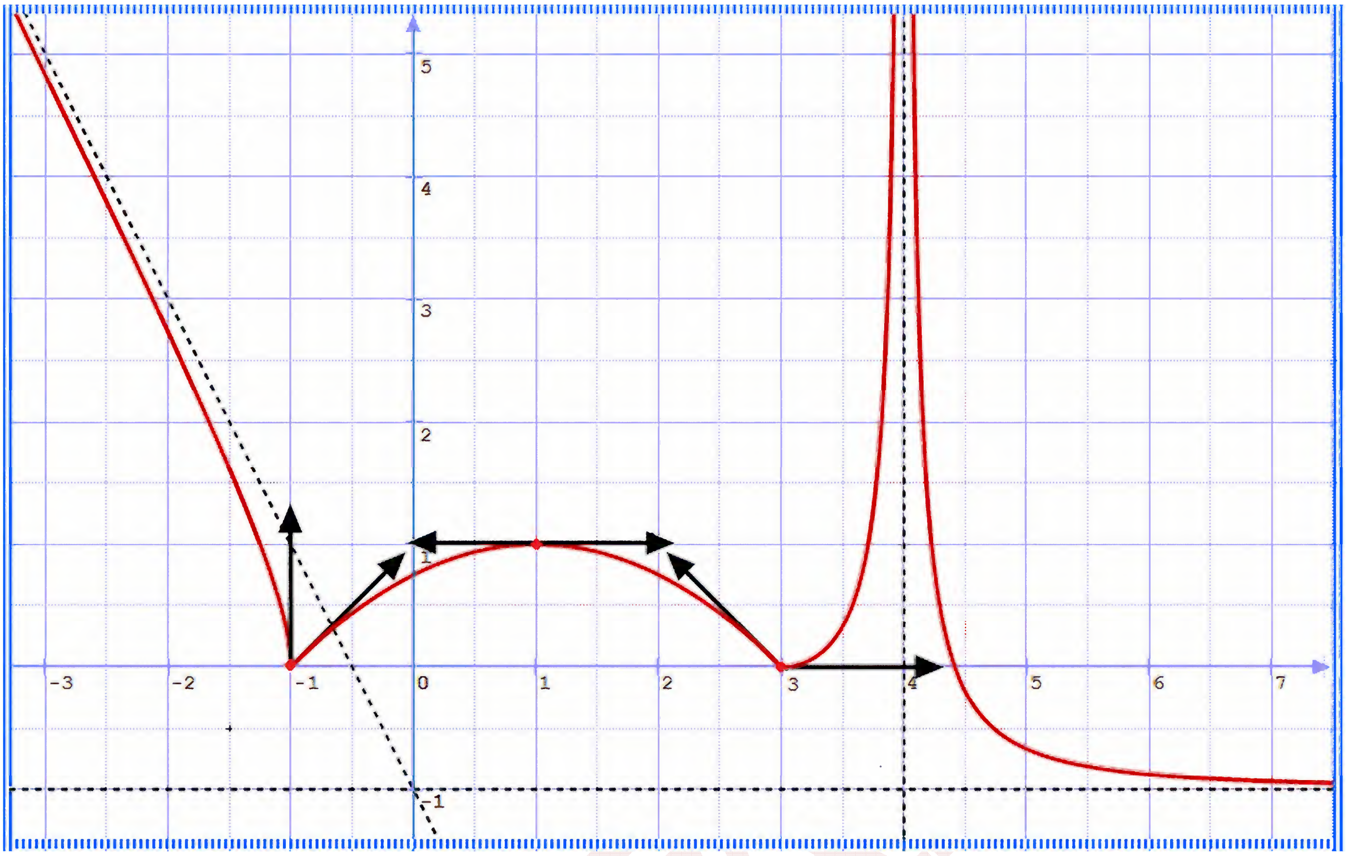
b) en 1.

c) à gauche et à droite en 3.

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x),\ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x},\ \lim_{x \to -\infty} f(x) + 2x,\ \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)}{x+1},\ \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1},\ \lim_{x \to 4} f(x) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

3) Dresser le tableau de variation de f.



Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. *On donne les points :*

$A(0,0,2)$, $B(-1,2,1)$, $C(2,-1,1)$ *et* $D(0,1,-1)$.

1) a) *Déterminer* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) *En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est* $x+y+z-2=0$.

2) a) *Vérifier que* $I(1,1,0)$ *est le centre du cercle* $\mathscr{C}$ *circonscrit au triangle ABC.*

b) *Donner une représentation parametrique de l'axe* Δ *du cercle* $\mathscr{C}$.

c) *Soit Q le plan médiateur du segment* $[AD]$.

Vérifier que $Q \cap \Delta = \{\Omega(2,2,1)\}$.

3) *Soit S la sphère de centre* Ω *et passant par A.*

a) *Ecrire une équation cartésienne de S.*

b) *Vérifier que S est la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD.*

4) *On désigne par R le plan d'équation* $z-2=0$ *et par* $\mathscr{C}'$ *l'ensemble des points* $M_\theta(2+2\sqrt{2}\cos\theta,\ 2+2\sqrt{2}\sin\theta,\ 2)$ *où* $\theta \in [0,2\pi[$.

a) *Vérifier que* $A \in \mathscr{C}'$.

b) *Montrer que* $\mathscr{C}' \subset S \cap R$.

c) *Montrer que si* θ *décrit l'intervalle* $[0,2\pi[$ *alors* M_θ *varie sur un cercle que l'on précisera.*

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$ (faites le tableau de signe de $4-x^2$)

2) a) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-\sqrt{4-x^2}+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(x+2)-\sqrt{4-x^2}}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} 1-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$

$$= \lim_{x\to -2^+} 1-\frac{4-x^2}{(x+2)\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to -2^+} 1-\frac{(2-x)\cancel{(2+x)}}{\cancel{(x+2)}\sqrt{4-x^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -2 et la courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse -2 une demi tangente verticale.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-\sqrt{4-x^2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)-\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} 1-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1-\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} 1+\frac{(2+x)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et la courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse 2 une demi tangente verticale.

b) la fonction $x \mapsto 4-x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]-2,2[$

donc f est dérivable sur $]-2,2[$ et pour tout réel $x \in]-2,2[$ on a :

$$f'(x) = 1-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = 1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)}$$

$$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)}.$$

c) Si $x \in]-2,0]$, $f'(x)$ admet le signe de $2-x^2$ et si $x \in [0,2[$, $f'(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} > 0.$

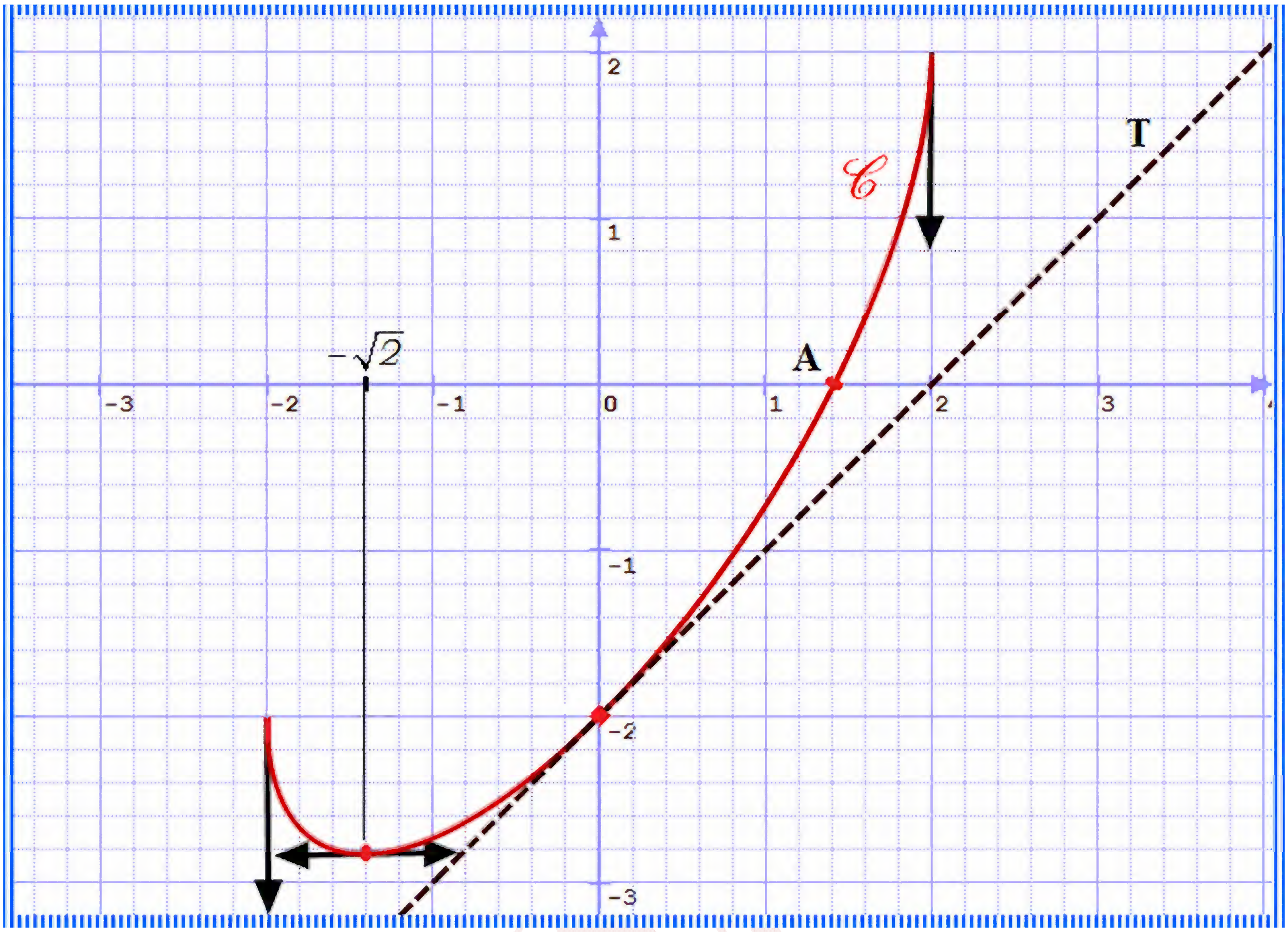
x	-2		$-\sqrt{2}$		0		2
$2-x^2$		$-$	0	$+$			
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	‖
$f(x)$	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗			2

3) a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{4-x^2}$ et $x\in[0,2] \Leftrightarrow x^2 = 4-x^2$ et $x \in [0,2]$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$ et $x\in[0,2] \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ donc $\mathscr{C} \cap \left(O,\vec{i}\right) = \left\{A(\sqrt{2},0)\right\}$.

b) $T : y = f'(0)x + f(0) = x-2$ donc $\boxed{T : y = x-2}$

4)



Exercice 2

1) a) A gauche de -1, la courbe 𝒞 admet une demi-tangente verticale

Donc *f* n'est pas dérivable à gauche en -1.

A droite de -1, la courbe 𝒞 admet une demi-tangente de coefficient directeur 1

Donc *f* est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=1$.

b) Au point d'abscisse 1, la courbe 𝒞 admet une tangente horizontale donc *f* est dérivable en 0 et $f'(1)=0$.

c) A gauche de 3, la courbe 𝒞 admet une demi-tangente de coefficient directeur -1

Donc *f* est dérivable à gauche en 3 et $f'_g(3)=-1$.

A droite de 3, la courbe 𝒞 admet une demi-tangente horizontale

Donc *f* est dérivable à droite en 3 et $f'_d(3)=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x=-1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)}{x+1}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{f(x)}{x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

x	$-\infty$		-1		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	+	0	-	‖	+	‖	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Exercice 3

1) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-3\vec{n}$ avec $n=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ A, B et C déterminent un plan

Le plan P passe par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Donc $M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow(x-0)\times1+(y-0)\times1+(z-2)\times1=0$

D'où le plan P admet pour équation cartésienne $x+y+z-2=0$.

2) a) $IA=IB=IC=\sqrt{6}$ et $I\in P$ (car $1+1+0-2=0$) $\Rightarrow I$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par I donc $\Delta:\begin{cases}x=1+\alpha\\y=1+\alpha\\z=\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

c) Q plan mediateur de $[AC]$ donc Q de vecteur normal $\overrightarrow{AD}$ et passe par $J=A*D$

$J(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{j}-3\vec{k}$ donc $Q:(x-0)\times0+\left(y-\frac{1}{2}\right)\times1+\left(z-\frac{1}{2}\right)\times(-3)=0$

Alors Q est le plan d'équation cartésienne : $\boxed{y-3z+1=0}$

$M(x,y,z)\in\Delta\cap Q\Leftrightarrow x=1+\alpha, y=1+\alpha, z=\alpha$ et $y-3z+1=0$

$\Leftrightarrow(1+\alpha)-3\alpha+1=0$ et $x=1+\alpha, y=1+\alpha, z=\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$ et $x=2, y=2, z=1$

Donc $\Delta\cap Q=\{\Omega(2,2,1)\}$.

3) a) $\Omega A=3$ donc $S:(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

b) On peut vérifier facilement que $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=3$.

4) a) Pour $\theta=\frac{5\pi}{4}$, on a $M_\theta=A$ donc $A\in\mathscr{C}'$.

b) $M(x,y,z)\in\mathscr{C}'\Rightarrow z=2$ ou encore $z-2=0$ donc $M\in R$ alors $\mathscr{C}'\subset R$

Soit $M(2+2\sqrt{2}\cos\theta, 2+2\sqrt{2}\sin\theta, 2)\in\mathscr{C}'$ on a :

$(\cancel{2}+2\sqrt{2}\cos\theta-\cancel{2})^2+(\cancel{2}+2\sqrt{2}\sin\theta-\cancel{2})^2+(2-1)^2=8\cos^2\theta+8\sin^2\theta+1=8+1=9$

$\Rightarrow M\in S$ alors $\mathscr{C}'\subset S$ $\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{C}'\subset S \text{ et } \mathscr{C}'\subset R\Rightarrow\mathscr{C}'\subset S\cap R.}$

c) $d(\Omega,R)=\frac{|1-2|}{\sqrt{1}}=1<3\Rightarrow S\cap R$ est un cercle de rayon $r=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ et de centre le point $H(x,y,z)$ tel que H projeté orthogonal de Ω sur R.

donc $\begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=\lambda\vec{k}\ (\vec{k}\text{ vecteur normal de }R)\\H\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2, y=2, z=1+\lambda\\z=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2$

Conclusion : Si θ décrit $[0,2\pi[$ alors M_θ varie sur le cercle du plan R de centre $H(2,2,2)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.