Thème	Série d'exercices	Professeur
Arithmétique	Classe : 4ème Math	Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (Session principale 2008)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que

$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier .

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.
Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice 2 (Session de contrôle 2009)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

1) a) Vérifier que (0, – 2) est une solution de (E) .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) .

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0 .

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y) . Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.

c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Exercice 3 (Session principale 2010)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (– 23) par (–5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 (\text{mod } 12)$.

4) $x^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$ équivaut à $x \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 (\text{mod } 4) \\ x \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \ (\text{mod } 20)$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$.

Exercice 4 (Session de contrôle 2010)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \ (\text{mod } 100^2)$.

b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

Exercice 5 (Session principale 2011)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \ (\text{mod } 2)$.

b) Si $x \equiv 2 \ (\text{mod } 14)$ alors $x \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$.

c) Si $4x \equiv 10y \ (\text{mod } 5)$ alors $x \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 (\text{mod } 5) \\ y \equiv 5 (\text{mod } 8) \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 6 (Session de contrôle 2012)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :

$7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système

$\begin{cases} n \equiv 6 \quad (\text{mod } 7) \\ n \equiv 15 \ (\text{mod } 18) \end{cases}$

Exercice 7 (Session de contrôle 2013)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

1) a) Vérifier que $(3, 0)$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit (x, y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?

b) Déterminer les couples (x, y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 1 (Session principale 2008)

1) $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E): $3x-8y=5$.

Donc $3(x+1)=8(y+1)$ or : $\begin{cases}3\wedge 8=1\\ 8/3(x+1)\end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$

par suite Il existe un entier k tel que $x=8k-1$ $(k\in ¢)$ .Remplaçons x par sa valeur

on obtient $8(y+1)=3\times 8k$ $(k\in ¢)$ par suite $y=3k-1$ $(k\in ¢)$.

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k-1,3k-1)$ est solution de l'équation (E). D'où $S_{¢\times¢}=\{(8k-1,3k-1)\ ;\ k\in ¢\}$.

2) a- On a : $\begin{cases}3x=n-2\\ 8y=n-7\end{cases}$ donc $3x-8y=(n-2)-(n-7)=5$ d'où (x,y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases}n=3x+2 & (x\in ¢)\\ n=8y+7 & (y\in ¢)\end{cases}$ donc (x,y) est solution de (E) d'où

$\begin{cases}x=8k-1\\ y=3k-1\end{cases}$ $(k\in ¢)$ et par suite $n=3(8k-1)+2=24k-1$ ainsi $n\equiv -1 \pmod{24}$ donc $n\equiv 23 \pmod{24}$.

Réciproquement ,soit n un entier vérifiant $n\equiv 23 \pmod{24}$ donc $n=24K+23$ $(K\in ¢)$

d'où $\begin{cases}n=3(8K+7)+2\\ n=8(3K+2)+7\end{cases}$ $(K\in ¢)$ ainsi $\begin{cases}n=3k+2 & (k\in ¢)\\ n=8k'+7 & (k\in ¢)\end{cases}$

par suite n est solution de $(S)\begin{cases}n\equiv 2 \pmod 3\\ n\equiv 7 \pmod 8\end{cases}$

3) a- $\begin{cases}2^2\equiv 1 \pmod 3\\ 7^2\equiv 1 \pmod 8\end{cases}$ donc $\begin{cases}2^{2k}\equiv 1 \pmod 3\\ 7^{2k}\equiv 1 \pmod 8\end{cases}$ $(k\in ¥)$

b- • $\begin{cases}1991=3\times 663+2\\ 1991=8\times 248+7\end{cases}$ ainsi $\begin{cases}1991\equiv 2 \pmod 3\\ 1991\equiv 7 \pmod 8\end{cases}$ par suite 1991 est solution de (S).

• Comme 1991 est solution de (S) donc $1991\equiv 23 \pmod{24}$ ou encore $1991\equiv -1 \pmod{24}$

Donc $(1991)^{2008}\equiv(-1)^{2008} \pmod{24}$ d'où $(1991)^{2008}\equiv 1 \pmod{24}$ on en déduit alors que $(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.

Exercice 2 (Session de contrôle 2009)

1) a- $3\times 0+4\times(-2)=-8$ donc $(0,-2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left.\begin{array}{l}3\times x+4\times y=-8\\ 3\times 0+4\times(-2)=-8\end{array}\right\}$ donc $3\times x=-4\times(y+2)$

comme $\left.\begin{array}{l}3/-4\times(y+2)\\ 3\wedge(-4)=1\end{array}\right\}$ alors d'après Gauss $3/(y+2)$ ainsi $y=3k-2$ où $k\in\mathbb{Z}$

par suite $3\times x=-4\times(3k)$ d'où $x=-4k$ ainsi $(x,y)=(-4k\ ,\ 3k-2)$ où $k\in\mathbb{Z}$

réciproquement : soit $(x,y)=(-4k\ ,\ 3k-2)$ où $k\in\mathbb{Z}$

on a : $3\times(-4k)+4\times(3k-2)=-8$ donc (x,y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-4k\,,\,3k-2)\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 3 (Session principale 2010)

*1) **Faux***

$-23=(-5)\times 5+2$ *avec* $0\le 2\le |-5|$ *donc le quotient de* (-23) *par* (-5) *est* 5

*2) **Vrai***

Soit $d=b\wedge 64$.

d divise b et 64 donc d divise 64a et 9b d'où d divise 64a+9b

alors d divise 1 d'où d=1

*3) **Faux***

$147\equiv 3\pmod{12}$ *donc* $147^n\equiv 3^n\pmod{12}$

n	1	2	3	4	5	6
$3^n\pmod{12}$	3	9	3	9	3	3

On remarque (on peut le montrer par récurrence) que:

$3^n\equiv\begin{cases}3 & \text{si } n \text{ est impair}\\ 9 & \text{si } n \text{ est pair } (n>0)\end{cases}$ *mod 12. Donc* $147^{146}\equiv 3^{146}\equiv 9\pmod{12}$

*4) **Faux***

Il suffit de prendre 4 comme contre exemple.

$4^2=16\equiv 0\pmod 8$, *mais* $4\not\equiv 0\pmod 8$

*5) **Vrai***

$\begin{cases}x\equiv 3 & (\text{mod}4)\\ x\equiv 4 & (\text{mod}5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\equiv 0 & (\text{mod}4)\\ x+1\equiv 0 & (\text{mod}5)\end{cases}$ *donc* $x+1\equiv 0\pmod{20}$ *car* $4\wedge 5=1$

D'où $x\equiv -1\equiv 19\pmod{20}$

*6) **Vrai***

p premier distinct de 2 alors p est impair c-à-d p=2k+1

$p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$ *donc* $p\equiv 1\pmod 4$.

Exercice 5 (Session principale 2011)

a) **Vrai.** En effet : on sait que si x est un entier, alors son reste modulo 2 est soit 0 soit 1:

Reste de x (mod2)	0	1
Reste de x^3 (mod2)	0	1

Il en résulte du tableau ci-dessus que $x^3\equiv x\pmod 2$.

✓ *On pourrait envisager la justification suivante :* $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ *est toujours pair, par conséquent* $x^3\equiv x\pmod 2$

b) **Faux**. Car pour $x=2$, $2\equiv 2\pmod{14}$ et 2 non congru à 1 modulo 7.

c) **Vrai**. En effet : si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $4x \equiv 0 \pmod 5$ et donc $x \equiv 0 \pmod 5$; car $4 \wedge 5 = 1$.

✓ *Il s'agit d'utiliser le lemme de Gauss:* $\begin{cases} ax \equiv 0 \pmod b \\ b \text{ ne divise pas } a \end{cases}$ alors $x \equiv 0 \pmod b$

d) **Faux**. Car : pour $x = 9$ et $y = 5$, $8 \times 9 - 7 \times 5 = 47$.

Exercice 6 (Session de contrôle 2012)

1. **a)** $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9 \times (7-6) = 9$ donc $(9, -3)$ est solution de (E).

   b) On sait que $(9, -3)$ est solution de (E)

   donc $7x + 18y = 7 \times 9 + 18 \times (-3) \Leftrightarrow 7(x-9) = 18(-y-3)$. **(*)**

   7 divise $18(-y-3)$ et $7 \wedge 18 = 1$ donc d'après Gauss que 7 divise $-y-3$

   donc $-y-3 = 7k,\ k \in \mathbb{Z}$

   Par suite $y = -7k - 3,\ k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant y par sa valeur dans **(*)**

   on obtient $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$

   Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $7(18k+9) + 18(-7k-3) = 7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$.

   On en déduit que $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(18k+9, -7k-3), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} n = 6 + 7x \\ n = 15 + 18y \end{cases}$

   donc $6 + 7x = 15 + 18y$ d'où $7x + 18(-y) = 9$.

   D'après 1) b) il en résulte que $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$, par suite $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$

   Réciproquement : Si $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$, comme $\begin{cases} 126 = 18 \times 7 \\ 69 \equiv 6 \pmod 7 \\ 69 \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

   alors $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$. On en déduit que $S_{\mathbb{Z}} = \{69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7 (Session de contrôle 2013)

1. a) $2 \times 3 + 5 \times 0 = 6$ donc le couple $(3, 0)$ est une solution de (E).

   b) Le couple $(3, 0)$ est une solution de (E) donc $2x + 5y = 2 \times 3 + 5 \times 0 \Leftrightarrow 2(x-3) = -5y\ (*)$

   donc $\begin{cases} 2 \mid 5y \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$ d'où d'après Gausse $2 \mid y$ par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k$.

   En remplaçant y par sa valeur trouvée dans $(*)$ on obtient $x = -5k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $2(-5k+3) + 5(2k) = 6$.

   Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(-5k+3, 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. a) Soit (x,y) une solution de (E), $\begin{cases} x\wedge y \mid x \\ x\wedge y \mid y \end{cases}$ donc $x\wedge y \mid 2x+5y=6$, il en résulte que $x\wedge y \in D_6^+=\{1,2,3,6\}$.

b) Soit (x,y) une solution de (E), $x\wedge y=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5k+3\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ 2k\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2) \end{cases}$

donc $\begin{cases} -5k+3\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ 4k\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} k\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2) \\ 2\wedge 3=1 \end{cases}$ donc $k=6n$, $n\in\mathbb{Z}$,

il en résulte que $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases}$, $n\in\mathbb{Z}$, $2x+5y=2(-30n+3)+5(12n)=6$

donc (x,y) est une solution de (E) de plus $\begin{cases} x=-30n+3\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ y=12n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \end{cases}$

et x est impair donc elle n'est pas divisible par 6, d'où $x\wedge y=3$.

Ainsi $x\wedge y=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases}$, $n\in\mathbb{Z}$.