Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : $4^{ème}$ ScExp

Février 2017

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (12 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est définie sur le domaine $D=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et à droite en 2 et interpréter les résultats trouvés.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

et $\forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y=-2x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

b) Tracer Δ et $\mathscr{C}$.

4) Soient $M(x,y)$ et $N(a,b)$ deux points du plan.

On note $\mathscr{C}'$ le symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à O et Γ la courbe d'équation $y^2+2xy+4=0$.

a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport à O si et seulement si $a=-x$ et $b=-y$.

b) Montrer que $M\in\mathscr{C}'\Leftrightarrow x\in D$ et $y=-x-\sqrt{x^2-4}$.

c) Montrer que $\Gamma=\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'$

d) Tracer Γ dans le meme repère que $\mathscr{C}$.

5) Soient le vecteur $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ et M un point du plan.

On désigne par (x,y) les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et par (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(O,\vec{u},\vec{i})$.

a) Déterminer x et y en fonction de X et Y.

b) En déduire une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{i})$.

Exercice 2 (8 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,-1,4)$ *et* $B(-1,0,2)$ *et le plan* P *d'équation cartésienne* $x+y-z+3=0$.

On note $\mathscr{C}$ *le cercle, du plan* P, *de centre* B *et de rayon* $\sqrt{13}$ *et* S *la sphère contenant* $\mathscr{C}$ *et passant par le point* A.

Partie I

On note $I(a,b,c)$ *le centre de* S

1) *Vérifier que* $A \notin P$ *et* $B \in P$.

2) a) *Montrer que* $IA^2 - IB^2 = 13$.

   b) *En déduire que* $2a - b + 2c = 0$.

3) a) *Donner une représentation paramétrique de la droite* Δ *perpendiculaire au plan* P *en* B.

   b) *Montrer que* I *admet pour coordonnées* $(1,2,0)$.

4) *Donner une équation cartésienne de la sphère* S.

Partie II

Pour tout réel m, *on considère l'ensemble* S_m *des points* $M(x,y,z)$ *tels que :*

$x^2+y^2+z^2-2mx-4my+5(m^2-5)=0$.

1) *Montrer que pour tout réel* m, S_m *est une sphère dont on précisera le centre* I_m *et le rayon* R_m.

2) *Déterminer les valeurs de* m *pour lesquelles* S_m *passe par* A.

3) *Déterminer l'ensemble des points* I_m *quand* m *décrit* $\mathbb{R}$.

4) *Discuter, suivant le paramètre réel* m, *la position relative de* S_m *et* P.

5) *Déterminer la valeur de* m *pour laquelle* S_m *coupe* P *suivant un grand cercle.*

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2-4\geq 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

D'après le tableau de signe de x^2-4 on a $D=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to-2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2-4}-x-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}-1=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-4}{(x+2)\sqrt{x^2-4}}-1$

$$=\lim_{x\to-2^-}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\sqrt{x^2-4}}-1=\lim_{x\to-2^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}-1=-\infty$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } -2 \text{ et sa courbe } \mathscr{C} \text{ admet au point d'abscisse } -2 \text{ une demi tangente verticale.}}$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}-x+2}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}-1$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}-1=\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\sqrt{x^2-4}}-1=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}-1=+\infty$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 2 \text{ et sa courbe } \mathscr{C} \text{ admet au point d'abscisse } 2 \text{ une demi tangente verticale.}}$

b) La fonction $x\mapsto x^2-4$ est dérivable et strictement positive sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-2\right[$ et $\left]2,+\infty\right[$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ est dérivable sur $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$ et par suite f est dérivable sur $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{x^2-(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}.$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$

$\Rightarrow\left(O,\vec{i}\right)$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

d) $\displaystyle f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}<0$ pour $x<-2$ et $\displaystyle f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}>0$ pour $x>2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖		‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2		-2	↗	0

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-4}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0$

Donc la droite $\Delta : y=-2x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

b) Voir figure ci-dessous.

4) a) M et N symétriques par rapport à $O \Leftrightarrow O = M*N \Leftrightarrow \dfrac{x+a}{2}=0$ et $\dfrac{y+b}{2}=0$

$\Leftrightarrow x+a=0$ et $y+b=0 \Leftrightarrow a=-x$ et $b=-y$.

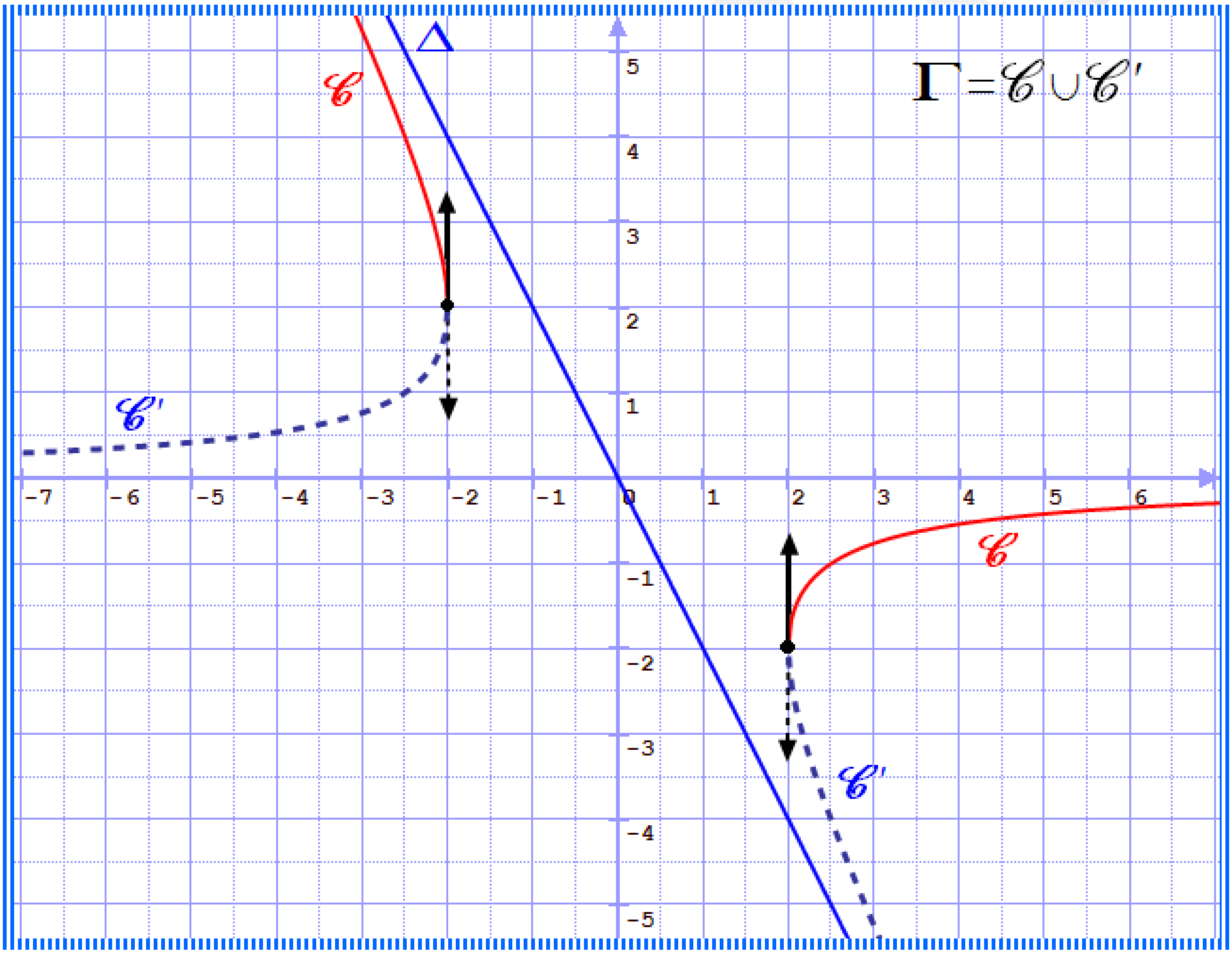
b) $M\in\mathscr{C}' = S_O(\mathscr{C}) \Leftrightarrow M = S_O(N)$ avec $N\in\mathscr{C} \Leftrightarrow a\in D$ et $b=f(a)$ avec $a=-x$ et $b=-y$

$\Leftrightarrow x\in D$ (D symetrique par rapport à 0) et $y=-f(-x)=-x-\sqrt{x^2-4}$

c) $M\in\Gamma \Leftrightarrow M\in\mathscr{C}$ ou $M\in\mathscr{C}' \Leftrightarrow x\in D$ et $y=f(x)$ ou $y=-x-\sqrt{x^2-4}$

$\Leftrightarrow x\in D$ et $y+x=\sqrt{x^2-4}$ ou $y+x=-\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow (y+x)^2 = x^2-4 \Leftrightarrow y^2+2xy+4=0.$

d) Voir figure



5) a) $\overrightarrow{OM} = X\vec{u}+Y\vec{i} = X(\vec{i}-2\vec{j})+Y\vec{i} \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j} = (X+Y)\vec{i}-2X\vec{j} \Leftrightarrow x=X+Y$ et $y=-2X$.

b) $M\in\Gamma \Leftrightarrow y^2+2xy+4=0 \Leftrightarrow (-2X)^2+2(X+Y)(-2X)+4=0$

$\Leftrightarrow 4X^2-4X^2-4XY+4=0 \Leftrightarrow XY=1$ (Γ est une hyperbole)

Exercice 2

Partie I

1) $A(1,-1,4)$ et $B(-1,0,2)$. $1-1-4+3=-1\neq 0$ et $-1+0-2+3=0 \Rightarrow A\notin P$ et $B\in P$.

2) a) $P\cap S(I,R)=\mathscr{C}(B,\sqrt{13}) \Rightarrow \sqrt{13}=\sqrt{R^2-(d(I,P))^2}=\sqrt{IA^2-IB^2}$ car $A\in S$

Donc $IA^2-IB^2=13$.

b) $IA^2-IB^2=13 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2-(a+1)^2-b^2-(c-2)^2=13$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2}-2a+1+\cancel{b^2}+2b+1+\cancel{c^2}-8c+16\cancel{-a^2}-2a-1\cancel{-b^2}\cancel{-c^2}+4c-4=13$

$\Leftrightarrow -4a+2b-4c+13=13 \Leftrightarrow -4a+2b-4c=0 \Leftrightarrow -2a+b-2c=0 \Leftrightarrow 2a-b+2c=0.$

3) a) $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $P \Rightarrow \vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ

$$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=\alpha \qquad ,\alpha\in\mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}$$

b) B est le projeté orthogonal de I sur $P \Rightarrow (BI)\perp P \Rightarrow (IB)=\Delta \Rightarrow I\in\Delta$

$\Rightarrow$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tq $a=-1+\alpha$, $b=\alpha$ et $c=2-\alpha$ et on a $2a-b+2c=0$

$\Rightarrow -2+2\alpha-\alpha+4-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=2$ ce qui donne $a=1$, $b=2$ et $c=0$

c) $A\in S \Rightarrow R=IA=\sqrt{9+16}=5 \Rightarrow S:(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=25.$

Partie II

1) $x^2+y^2+z^2-2mx-4my+5(m^2-5)=0. \Leftrightarrow (x^2-2mx)+(y^2-4my)+z^2+5m^2-25=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2-m^2+(y-2m)^2-4m^2+z^2+5m^2-25=0 \Leftrightarrow (x-m)^2+(y-2m)^2+z^2=25$

Donc pour tout réel m, S_m est une sphère de centre $I_m(m,2m,0)$ et de rayon 5.

2) $A\in S_m \Leftrightarrow 1+1+16-2m+4m+5(m^2-5)=0 \Leftrightarrow 5m^2+2m-7=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=-{}^{7}\!/_{5}$.

3) $I_m(x,y,z)$ où $\begin{cases} x=m \\ y=2m\ ,\ m\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$ L'ensemble des points I_m quand m décrit $\mathbb{R}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{i}+2\vec{j}$ passant par le point O.

4) $d_m=d(I_m,P)=\dfrac{|m+2m+3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,|m+1|$.

$R^2-d_m{}^2=25-3(m+1)^2=-3m^2-6m+22=0$

$\Delta=36+4(-3)\times 22=300=(10\sqrt{3})^2$ donc $m'=\dfrac{6-10\sqrt{3}}{-6}=-1+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ et $m''=-1-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

m	$-\infty$		m''		m'		$+\infty$
$R^2-d_m{}^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position de S_m et P		extérieurs	Tangents	sécants	Tangents	extérieurs	

5) S_m coupe P suivant un grand cercle $\Leftrightarrow I_m\in P \Leftrightarrow d(I_m,P)=0 \Leftrightarrow m+1=0 \Leftrightarrow m=-1.$