Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de synthèse n°1

Classe : 4ème ScExp

Janvier 2017

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

b) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

c) Drésser le tableau de variation de f et vérifier que $f([2,3]) \subset [2,3]$.

d) Montrer que pour tout $x \in [2,3]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]2,3[$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervale J que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

4) Soit La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - 2(1+i)z + 5 + 2i$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre le point I d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1) a) Soit $z \in \mathbb{C}$, vérifier que $f(z) = (z-(1+i))^2 + 5$ et déduire que si z est une solution de l'équation $f(z) = 0$ alors son image $M \in \mathscr{C}$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions tels que $Im(z_1) < 0$.

2) a) Vérifier que le cercle $\mathscr{C}$ passe par le point J d'affixe $-i$.

b) Tracer $\mathscr{C}$ et placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.

3) Pour tout réel $\theta \in [0, \pi[$, on pose $f_\theta(z) = z^2 - 2(1+i)z + 2i - 5e^{2i\theta}$.

a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f_\theta(z) = 0$. On note A_θ et B_θ les images des solutions

b) Montrer que les points A_θ et B_θ sont diamètralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$.

c) Déterminer le réel θ pour lequel $OA_\theta = OB_\theta$.

Exercice 3

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2AD = 2AE = 2$.

I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

K et L les centres respectifs des faces $CDHG$ et $ADHE$.

On suppose que le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est direct.

1) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L.

2) a) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires et que $IJKL$ est un parallélogramme.

b) Calculer l'aire du parallélogramme $IJKL$.

3) a) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

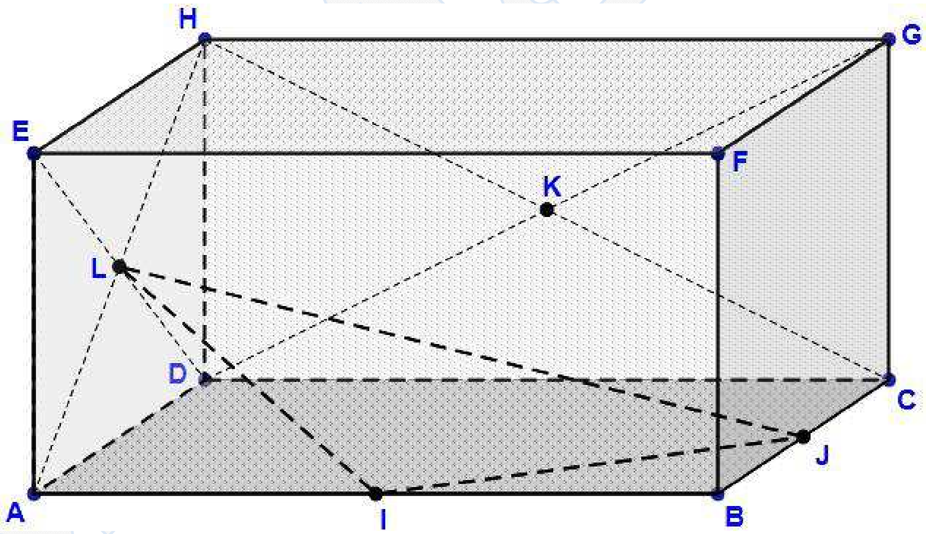
b) Vérifier que $x - 2y + 4z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (IJK).

4) Soit Δ la perpendiculaire au plan (IJK) passant par A.

a) Donner une représentation paramétrique de Δ.

b) Vérifier que Δ coupe le plan (IJK) au point $P\left(\frac{1}{21}, \frac{-2}{21}, \frac{4}{21}\right)$.

5) Calculer à l'aide de deux méthodes le volume du pyramide $AIJKL$.



Correction du devoir de synthèse n°1 4ScExp 2017

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1} - x.\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

$= \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2

f continue et strictement décroissante

donc $f([2,3]) = [f(3), f(2)] = \left[1+\frac{3}{2\sqrt2}, 1+\frac{2}{\sqrt3}\right]$

$1+\frac{3}{2\sqrt2} \simeq 2,06$ et $1+\frac{2}{\sqrt3} \simeq 2,15$ donc $f([2,3]) \subset [2,3]$

d) $2 \le x \Leftrightarrow 4 \le x^2 \Leftrightarrow 3 \le x^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt3 \le \sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt3 \le \left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \le \dfrac{1}{3\sqrt3}$

$\Leftrightarrow 0 < |f'(x)| \le \dfrac{1}{3\sqrt3}$.

2) Posons $g(x) = f(x) - x$. $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

g est continue et sur $[2,3]$ et $g(2)g(3) \simeq -0,14 < 0$

Donc l'équation $g(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) admet une solution $\alpha \in]2,3[$. En plus g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ d'ou l'unicité de α ds $]1,+\infty[$

3) a) f est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc c'est une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $J = f(]1,+\infty[) =]2,+\infty[$ (voir T.V de f)

b) Pour tout $x \in]2,+\infty[$ et tout $y \in]1,+\infty[$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = x - 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{y^2-1} = (x-1)^2$$

$\Leftrightarrow y^2 = y^2(x-1)^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow y^2(x^2 - 2x) = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x} \Leftrightarrow y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

4) a) Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 \in [2,3]$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in [2,3]$ et montrons que $u_{n+1} \in [2,3]$. On a $f([2,3]) \subset [2,3]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_n \in [2,3] \Rightarrow u_{n+1} \in [2,3]$.

b) f dérivable sur $[2,3]$ et $\forall x \in [2,3], |f'(x)| \le \frac{1}{3\sqrt3}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis et puisque u_n et α appartiennent à $[2,3]$ on a :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \le \tfrac{1}{3\sqrt3}|u_n - \alpha|$$

ou encore $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3\sqrt3}|u_n - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

c) Pour $n = 0$ on a : $|u_0 - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^n |u_0 - \alpha|$

et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3\sqrt3}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

d) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^n |u_0 - \alpha| \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3\sqrt3}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \quad \text{car } \frac{1}{3\sqrt3} \in]-1,1[\end{cases}$

Donc la suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 ou encore (u_n) converge vers α car $u_n = (u_n - \alpha) + \alpha$.

Exercice 2

1) a) $f(z) = z^2 - 2(1+i)z + 2i + 5$

$= z^2 - 2(1+i)z + (1+i)^2 + 5$

$= (z - (1+i))^2 + 5$.

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - (1+i))^2 = -5 \Rightarrow |z - (1+i)| = \sqrt5$

ou encore $IM = \sqrt5$ ce qui donne $z \in \mathscr{C}$.

b) $\Delta = 4(1+i)^2 - 4(2i+5) = 8i - 8i - 20 = \left(2i\sqrt5\right)^2$

Donc $z = \dfrac{2(1+i) - 2i\sqrt5}{2} = 1 + i - i\sqrt5 = z_1$

ou $z = \dfrac{2(1+i) + 2i\sqrt5}{2} = 1 + i + i\sqrt5 = z_2$.

2) a) $IJ = |-i - 1 - i| = |-1 - 2i| = \sqrt5 \Rightarrow J \in \mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ est alors le cercle de centre I passant par J.

b) Pour construire les points A et B, il suffit de remarquer que $Re(z_1) = Re(z_2) = 1$ ce qui permet

d' affirmer que $\{A,B\} = \mathscr{C} \cap D$ où D la droite : $x = 1$.

3) a) $\theta \in [0,\pi[$ et $f_\theta(z) = z^2 - 2(1+i)z + 2i - 5e^{2i\theta}$

$\Delta = 4(1+i)^2 - 4(2i - 5e^{2i\theta}) = \left(2\sqrt{5}e^{i\theta}\right)^2$.

Les solutions : $z' = 1 + i - \sqrt{5}e^{i\theta}$ et $z'' = 1 + i + \sqrt{5}e^{i\theta}$

d'images respectives A_θ et B_θ.

b) $IA_\theta = |z' - (1+i)| = \left|-\sqrt{5}e^{i\theta}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow A_\theta \in \mathscr{C}$.

$IB_\theta = |z'' - (1+i)| = \left|\sqrt{5}e^{i\theta}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow B_\theta \in \mathscr{C}$.

$A_\theta B_\theta = |z'' - z'| = \left|2\sqrt{5}e^{i\theta}\right| = 2\sqrt{5}$.

D'après ce qui précède on peut conclure que A_θ et B_θ sont diametralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$.

c) $OA_\theta = OB_\theta \Leftrightarrow |z'| = |z''|$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{5}\cos\theta)^2 + (1 - \sqrt{5}\sin\theta)^2 = (1 + \sqrt{5}\cos\theta)^2 + (1 + \sqrt{5}\sin\theta)^2$$

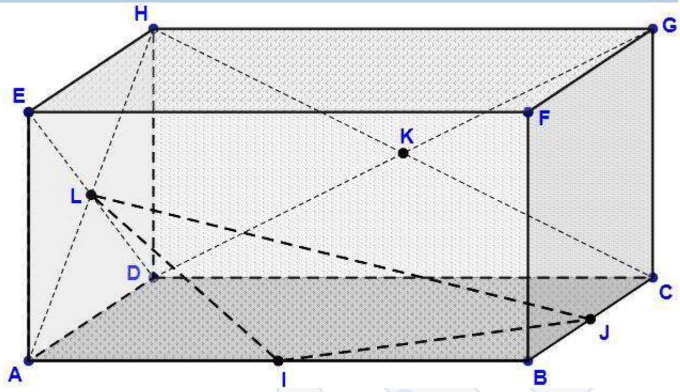
$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{5}\cos\theta + 5\cos^2\theta + 1 - 2\sqrt{5}\sin\theta + 5\sin^2\theta = 1 + 2\sqrt{5}\cos\theta + 5\cos^2\theta + 1 + 2\sqrt{5}\sin\theta + 5\sin^2\theta$$

$\Leftrightarrow \cos\theta + \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \sin(-\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi[$.

Exercice 3



1) $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}\right)$ est un repère orthonormé direct

$A(0,0,0)$; $I(1,0,0)$; $B(2,0,0)$; $D(0,1,0)$; $E(0,0,1)$ $C(2,1,0)$ et $H(0,1,1)$

$J = B * C \Rightarrow J\left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$. $K = C * H \Rightarrow K\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$

$L = A * H \Rightarrow L\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IL}\right) = \begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0$$

Donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

En plus $K \notin (ABC)$ donc I, J, K ne sont pas alignés ce qui prouve que $IJKL$ est un parallèlogramme.

b) $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

l'aire de $IJKL$: $\mathbb{A} = \left\|\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IL}\right\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{21}}{4}$

3) a) $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ d'après 2)b)

b) $4\,\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IL}$ est un vecteur normal au plan (IJK)

Donc une équation de (IJK) est : $x - 2y + 4z + d = 0$

Or $I(1,0,0) \in (IJK)$ donc $1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Alors $x - 2y + 4z - 1 = 0$ est une équation de (IJK).

4) a) La droite Δ est perpendiculaire au plan (IJK) et passe par A.

$\Delta \perp (IJK) \Rightarrow$ tout vecteur normal au plan (IJK) est un vecteur directeur de Δ.

$$\text{Donc } \Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \quad ; \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 4\alpha \end{cases}$$

$$\text{b) } P(x,y,z) \in \Delta \cap (IJK) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = 4\alpha \\ x - 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\alpha + 16\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{21} \\ x = \frac{1}{21} \text{ et } y = \frac{-2}{21} \text{ et } z = \frac{4}{21} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{21}, \frac{-2}{21}, \frac{4}{21}\right).$$

c) $V = \frac{1}{3}\mathbb{A} \times AP = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{21}}{4}\frac{\sqrt{21}}{21} = \frac{1}{12}$.

ou encore $V = \frac{1}{3}\left|\det\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)\right| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$

$= \frac{1}{3}\left(\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. cqfd