Epreuve	Devoir de contrôle n°3	Professeur
Mathématiques	Classe : $3^{ème}$ T	Dhaouadi
Durée : 2H		Nejib

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *on considère les points*

$A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$ *et les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

1) *Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.*

2) *Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment* $[AB]$.

3) a) *Calculer le déterminant des vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.

b) *En déduire que* $\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)$ *est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.*

4) *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *dans la base* $\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)$.

Exercice 2

Considérons la suite réelle (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :*

$u_0 = 1$ *et pour toute entier naturel n,* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1) a) *Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,* $u_n \leq 6$.

b) *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

2) *Soit la suite* (v_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $v_n = u_n - 6$

a) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison.*

b) *Exprimer* v_n *et puis* u_n *en fonction de n.*

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Calculer S_n *en fonction de* n.

Exercice 3

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *par :* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

On note $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de 1 on a :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

2) a) Montrer que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ *est une asymptote à la courbe* $\mathscr{C}$.

4) Montrer que le point I(1,0) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

5) Tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.