Epreuve	Devoir de contrôle n°2	Professeur
Mathématiques	Classe : 4ème ScExp	Dhaouadi
Durée : 2H	Novembre 2016	Nejib

Exercice 1 (6 points)

On considère la suite réelle (u_n) *définie par :* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$.

1) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $2 \le u_n \le 4$.

2) *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

3) *En déduire que* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

4) a) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $4 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(4 - u_n)$.

b) *En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel* n, $4 - u_n \le 2\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) *Retrouver alors le résultat de 3).*

Exercice 2 (6 points)

Soient α *et* β *des réels strictement positifs tels que* $\alpha < \beta$.

On définie les suites (x_n) *et* (y_n) *par :* $x_0 = 1$, $y_0 = 20$ *et* $\forall n \in \mathbb{N};\ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + \alpha y_n}{1+\alpha} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + \beta y_n}{1+\beta} \end{cases}$

1) *On note* (w_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par :* $w_n = y_n - x_n$.

a) *Montrer que* (w_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \dfrac{\beta - \alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}$.

b) *En déduire que pour tout entier naturel* n, $x_n \le y_n$.

2) a) *Montrer que la suite* (x_n) *est croissante et que la suite* (y_n) *est décroissante.*

b) *En déduire que les suites* (x_n) *et* (y_n) *convergent vers une même limite* l.

3) *Dans la suite on prendra* $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

Pour tout entier naturel n, *on pose* $t_n = 4x_n + 15y_n$.

a) *Montrer que la suite* (t_n) *est constante.*

b) *En déduire la limite commune des deux suites* (x_n) *et* (y_n).

Exercice 3 (8 points)

Soit m un nombre complexe non nul.

On pose $f(z) = z^3 - 2(1+m)z^2 + (m^2+3m+1)z - m(1+m)$.

Parie A

1) *Vérifier que* $f(1) = 0$.

2) *Déterminer les nombres complexes b et c pour lesquels* $\forall z \in \mathbb{C}$,

   $f(z) = (z-1)(z^2+bz+c)$.

3) *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation* $f(z) = 0$.

Partie B

Dans la suite on prendra $m = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in [0, \pi]$.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, *on donne les points*

A, M et N d'affixes respectives 1, m et $m+1$.

1) *Déterminer les réels θ pour lesquels les points O, A et M sont alignés.*

2) a) *Montrer que pour tout réel* $\theta \in]0, \pi[$, *le quadrilatère $OANM$ est un losange.*

   b) *Déterminer θ pour que $OANM$ soit un carré.*

3) *Détrminer l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points M et l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points N quand θ décrit l'intervalle* $[0, \pi]$.

SIGMATHS

Correction Du devoir

Exercice 1

1) Raisonnement par récurrence :

- Pour $n = 0$, $2 \le u_0 = 2 \le 4$ vrai
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2 \le u_n \le 4$ et montrons que $2 \le u_{n+1} \le 4$.

$2 \le u_n \le 4 \Leftrightarrow 10 \le 5u_n \le 20$

$\Leftrightarrow 6 \le 5u_n - 4 \le 16 \Leftrightarrow \sqrt{6} \le \sqrt{5u_n - 4} \le 4$

Donc $2 \le u_{n+1} \le 4$ car $2 \le \sqrt{6}$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \le u_n \le 4$.

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4 - u_n^2}{\sqrt{5u_n - 4} + u_n} = \dfrac{(u_n - 4)(1 - u_n)}{u_{n+1} + u_n}$

$2 \le u_n \le 4 \Rightarrow u_n - 4 \le 0,\ 1 - u_n \le 0,\ u_{n+1} + u_n > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$ et (u_n) croissante

3) (u_n) croissante et majorée (par 4) donc (u_n) est convergente. on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto \sqrt{5x - 4}. \\ (u_n) \text{ converge vers } l \in [2,4] \\ f \text{ continue sur } [2,4] \subset \left[\tfrac{4}{5}, +\infty\right[\end{cases}$$

Donc $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow 5l - 4 = l^2$ et $l \ge \tfrac{4}{5}$

La résolution de cette équation donne $l = 4$.

4) a) $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{5u_n - 4} = \dfrac{5(4 - u_n)}{4 + \sqrt{5u_n - 4}}$

$2 \le u_{n+1} \le 4 \Rightarrow 6 \le 4 + u_{n+1} \le 8 \Rightarrow \dfrac{1}{4 + u_{n+1}} \le \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{4 + u_{n+1}} \le \dfrac{5}{6} \Rightarrow \dfrac{5(4 - u_n)}{4 + u_{n+1}} \le \dfrac{5}{6}(4 - u_n)$ sqfd

b) •Pour $n = 0$, $4 - u_0 = 2 \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^0 = 2$ vrai.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $4 - u_n \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

et montrons que $4 - u_{n+1} \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}$.

On a $4 - u_{n+1} \le \dfrac{5}{6}(4 - u_n)$ et $4 - u_n \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Donc $4 - u_{n+1} \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}$.

c) $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le 4 - u_n \le 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ car } \dfrac{5}{6} \in]-1, 1[\end{cases}$$

Donc $(4 - u_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(4 - u_n) = 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Exercice 2

1)a) $w_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \dfrac{x_n + \beta y_n}{1+\beta} - \dfrac{x_n + \alpha y_n}{1+\alpha}$

$= \dfrac{(x_n + \beta y_n)(1+\alpha) - (x_n + \alpha y_n)(1+\beta)}{(1+\beta)(1+\alpha)}$

$= \dfrac{\cancel{x_n} + \alpha x_n + \beta y_n + \cancel{\alpha\beta y_n} - \cancel{x_n} - \beta x_n - \alpha y_n - \cancel{\alpha\beta y_n}}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$= \dfrac{(\alpha - \beta)x_n + (\beta - \alpha)y_n}{(1+\alpha)(1+\beta)} = \dfrac{(\beta - \alpha)(y_n - x_n)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$= qw_n$ avec $q = \dfrac{\beta - \alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}$ donc (w_n) est une suite géométrique de raison q.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 q^n = 19q^n \ge 0$ car $\alpha < \beta$

Donc $x_n \le y_n$.

2) a) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\cancel{x_n} + \alpha y_n - \cancel{x_n} - \alpha x_n}{1+\alpha} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} w_n$

Or $w_n \ge 0$ donc $x_{n+1} - x_n \ge 0 \Rightarrow (x_n)$ croissante.

$y_{n+1} - y_n = \dfrac{x_n + \cancel{\beta y_n} - y_n - \cancel{\beta y_n}}{1+\beta} = \dfrac{-1}{1+\beta} w_n \le 0$

Donc (y_n) décroissante.

b) $q - 1 = \dfrac{\beta - \alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)} - 1$

$= \dfrac{\cancel{\beta} - \alpha - 1 - \alpha - \cancel{\beta} - \alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} < 0$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Donc $0 < q < 1$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0.$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \le y_n \\ (x_n) \text{ croissante et } (y_n) \text{ décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0 \end{cases}$$

Donc (x_n) et (y_n) sont deux suites adjacentes

$\Rightarrow (x_n)$ et (y_n) convergent vers la meme limite.

3) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 3y_n}{4}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + 4y_n}{5}$

a) $t_{n+1} = 4x_{n+1} + 15y_{n+1} = x_n + 3y_n + 3x_n + 12y_n$

$= 4x_n + 15y_n = t_n \Rightarrow (t_n)$ suite constante.

(x_n) et (y_n) convergent et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$

en plus $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 4x_0 + 15y_0 = 304$

Donc $4l + 15l = 304 \Leftrightarrow l = \dfrac{304}{19} = 16.$

Exercice 3 (8 points)

Partie A

1) $f(1) = 0$ c'est difficile ! je ne crois pas.

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-1)(z^2 + bz + c)$

$= z^3 + bz^2 + cz - z^2 - bz - c$

$= z^3 + (b-1)z^2 + (c-b)z - c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = -2 - 2m \\ c - b = m^2 + 3m + 1 \\ -c = -m - m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 2m \\ c = m + m^2 \\ c - b = m + m^2 + 1 + 2m \\ \quad = m^2 + 3m + 1 \end{cases}$$

3) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 - (1+2m)z + m + m^2 = 0$

$\Delta = 1 + 4m + 4m^2 - 4m - 4m^2 = 1$

Donc $z' = \dfrac{1 + 2m - 1}{2} = m$ et $z'' = \dfrac{1 + 2m + 1}{2} = m + 1$

En fin $S_{\mathbb{C}} = \{1, m, m+1\}$

Partie B

1) O, A et M alignés $\Leftrightarrow \dfrac{Aff(\overrightarrow{OM})}{Aff(\overrightarrow{OA})} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m = e^{i\theta} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

car $\theta \in [0, \pi]$.

2) $Aff(\overrightarrow{OA}) = 1$ et $Aff(\overrightarrow{MN}) = m + 1 - m = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$ en plus O, A et M ne sont pas alignés ($\theta \ne 0$ et $\theta \ne \pi$)

Donc $OANM$ est un parallélogramme.

$OA = 1$ et $OM = |m| = |e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow OA = OM$.

$OANM$ est un parallélogramme qui admet deux cotés consécutifs isométriques donc c'est un losange.

b) Le losange $OANM$ est un carré ssi $ON = AM$

$\Leftrightarrow |e^{i\theta} + 1| = |e^{i\theta} - 1|$

$\Leftrightarrow |\cos\theta + 1 + i\sin\theta| = |\cos\theta - 1 + i\sin\theta|$

$\Leftrightarrow (\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta + 1$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta + 1$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ car $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

3) $M(x,y) \in \mathscr{C}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \text{et } y \ge 0 \end{cases}$

Donc $\mathscr{C}_1$ est le demi cercle trigonométrique inclu dans le demi plan d'inéquation $y \ge 0$.

$N(x,y) \in \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \cos\theta \\ y = \sin\theta \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\mathscr{C}_2$ est le demi cercle de centre A et de rayon 1 inclu dans le demi plan $y \ge 0$