Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : $4^{\text{ème}}$ ScExp

Octobre 2016

Professeur

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1) Pour tout réel x, $EoE(x) = x$ où E désigne la fonction partie entière.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x^3 - 2} = \dfrac{1}{3}$.

3) Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et telle que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ alors f est croissante sur l'intervalle $[a,b]$.

4) Si z est un nombre complexe tel que $(z-1)^n + (z+1)^n = 0$ alors z est réel.

Exercice 2 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $1 - x \leq f(x) \leq 1 + x$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

2) Montrer que f est continue en 0.

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $]-\infty, 0]$, une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$.

5) Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer $f([\alpha, 0])$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2n\pi}$ admet dans $[\alpha, 0]$ une solution unique x_n.

c) En déduire que l'équation $fof(x) = 1$ admet une infinité de solutions.

Exercice 3 (6.5 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ *est rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

On donne les points A et B d'affixes respectives i et –i.

On considère l'application f de $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ *dans* $\mathcal{P}$ *qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que* $z' = \dfrac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$.

1) a) *Démontrer que si* $z \neq 0$ *et* $z' \neq 0$ *alors :*

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) \quad [2\pi]$$

b) *Montrer que si* $|z| = 1$ *alors* $f(M) = B$.

2) a) *Déterminer le point M tel que f(M)=M.*

b) *Déterminer l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire.*

3) a) *Démontrer que* $z' + i = \dfrac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$ *et* $z' - z = \dfrac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

b) *En déduire que* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{BM'}$ *sont colinéaires et que* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$ *sont orthogonaux*

c) *Déduire alors une construction du point M'.*

Exercice 4 (4 points)

Soient les nombres complexes $u = 2 + 2i$ *et* $v = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

1) *Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes u et v.*

2) *Donner les formes algébrique et trigonométrique du nombre complexe* $\dfrac{u}{v}$.

3) *En déduire* $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

4) *Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants:*

$\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]^{24}$ *et puis* $\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]^{2017}$