

Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4^{ème} ScExp

Professeur

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ alors :
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = +\infty$
 - b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = 0$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x) = +\infty$
- 2) Si f est une fonction continue sur $] -1, 1[$ et g est une fonction continue sur \mathbb{R} alors :
 - a) $g \circ f$ est continue sur \mathbb{R} .
 - b) $g \circ f$ est continue sur $] -1, 1[$.
 - c) $f \circ g$ est continue sur \mathbb{R}
- 3) La limite de $x^2 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à :
 - a) 2
 - b) $\frac{1}{2}$
 - c) 0
- 4) Pour tout entier naturel n , $(\sqrt{3} + i)^{12n}$ est égal à :
 - a) 2^{12n}
 - b) $2^{12n-1}(1 + i\sqrt{3})$
 - c) $2^{12n-1}(\sqrt{3} + i)$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 3 \sin(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout réel $x \leq -1$ on a : $\frac{x+3}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{x-1}$.
- 2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3) Montrer que f est continue en -1 .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $] -\infty, -1[$, au moins deux solutions α et β tels que $-3 < \alpha < -2.5 < \beta < -2$.

Exercice 3 (6 points)

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i$, $b = -1 - i$ et $c = -3 + 2i$.

Pour tout nombre complexe $z \neq c$ on pose $Z = \frac{z - a}{z - c}$.

1) a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $w = \frac{b - a}{b - c}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC .

2) a) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels

$$\text{Vérifier que l'on a : } \begin{cases} \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 + x - 3y - 4}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} \\ \operatorname{Im}(Z) = \frac{x + 5y - 7}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} \end{cases}$$

b) En déduire l'ensemble \mathcal{C} des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire.

c) Vérifier que l'ensemble \mathcal{C} est le cercle circonscrit au triangle ABC privé d'un point.

3) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$ est la droite (AC) privée d'un point.

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 2 - \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad z_C = 2 \quad \text{et} \quad z_D = \sqrt{3} - i.$$

1) a) Donner la forme exponentielle de z_D .

b) Montrer que $OBCD$ est un parallélogramme.

2) Donner la forme exponentielle de z_A et puis la forme algébrique de $\frac{z_B}{z_A}$.

3) a) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire la forme exponentielle de z_B .

c) Donner alors $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Correction du devoir de contrôle n°1

Exercice 1

- 1) **a** Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} gof(x) = +\infty$
- 2) **b** Si f est une fonction continue sur $] -1, 1[$ et g est une fonction continue sur \mathbb{R} alors gof est continue sur $] -1, 1[$.
- 3) **b** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$.
- 4) **a** Pour tout entier naturel n , $(\sqrt{3} + i)^{12n} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{12n} = 2^{12n} \left(e^{i\frac{12\pi}{6}} \right)^n = 2^{12n} \times 1^n = 2^{12n}$.

Exercice 2

$$1) -1 \leq \sin(\pi x) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin(\pi x) \leq 3 \Leftrightarrow x - 3 \leq x - 3 \sin(\pi x) \leq x + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} \leq \frac{x-3 \sin(\pi x)}{x-1} = f(x) \leq \frac{x-3}{x-1} \quad (\text{car } x-1 < 0)$$

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } x \leq -1 \text{ on a : } \frac{x+3}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x-1} = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{\text{D'après le théorème} \\ \text{des gendarmes}}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} - 1}{\sqrt{x} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\cancel{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = 0$$

3) f est continue sur $] -\infty, -1[$ (opérations sur des fonctions continue)

donc f est continue à gauche en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2-1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{1}{2} = f(-1)$$

Donc f est continue à droite en -1 .

f continue à gauche et à droite en $-1 \Rightarrow f$ continue en -1 .

4) f est continue sur l'intervalle $] -\infty, -1]$, donc en particulier f est continue sur chacun des intervalles $[-3, -2.5]$ et $[-2.5, -2]$.

$$\text{En plus on a : } f(-3) \times f(-2.5) = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{7} \right) < 0 \text{ et } f(-2.5) \times f(-2) = \left(-\frac{1}{7} \right) \times \frac{2}{3} < 0$$

Donc il existe deux réel α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ et $-3 < \alpha < -2.5 < \beta < -2$.

Exercice 3

$$1) A(a = 2 + i), B(b = -1 - i), C(c = -3 + 2i)$$

$$a) w = \frac{b - a}{b - c} = \frac{-3 - 2i}{2 - 3i} = \frac{(-3 - 2i)(2 + 3i)}{13} = \frac{-13i}{13} = -i.$$

$$b) |w| = 1 \Leftrightarrow \frac{|b - a|}{|b - c|} = 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = 1 \Leftrightarrow BA = BC \text{ en plus } w = \frac{z_{\overline{AB}}}{z_{\overline{CB}}} \text{ imaginaire}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CB} \text{ donc } ABC \text{ est un triangle rectangle et isocèle en } B.$$

$$2) a) \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 + x - 3y - 4}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{x + 5y - 7}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} \text{ (faites le calcul)}$$

$$b) M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \text{ et } z \neq c \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 3y - 4 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (-3, 2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (-3, 2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 \text{ et } (x, y) \neq (-3, 2)$$

Donc \mathcal{C} est le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$ privé du point C .

c) Les coordonnées de chacun des points A , B et C vérifient l'équation du cercle \mathcal{C}
Donc \mathcal{C} est le cercle circonscrit au triangle ABC .

$$3) Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \text{ et } (x, y) \neq (-3, 2) \Leftrightarrow x + 5y - 7 = 0 \text{ et } (x, y) \neq (-3, 2)$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$ est la droite $D : x + 5y - 7 = 0$ privés du point C et puisque $A(2, 1) \in D$ alors $D = (AC)$

Exercice 4

$$1) a) |z_D| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \Rightarrow z_D = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$b) \operatorname{Aff}(\overline{OC}) = 2 = (2 - \sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} - i) = \operatorname{Aff}(\overline{OB}) + \operatorname{Aff}(\overline{OD}) = \operatorname{Aff}(\overline{OB} + \overline{OD})$$

Donc $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ en plus $\operatorname{Aff}(\overline{OD}) / \operatorname{Aff}(\overline{OC}) = (\sqrt{3} - i) / 2 \notin \mathbb{R}$ donc les points O , C et D ne sont pas alignés ce qui prouve que $OBCD$ est un parallélogramme.

$$2) z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } \frac{z_B}{z_A} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i} = \frac{(2 - \sqrt{3} + i)(1 - i)}{2} = \frac{2 - \sqrt{3} + i - 2i + i\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i.$$

$$3) a) \frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i = (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$b) \frac{z_B}{z_A} = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_B = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}. z_A = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}. e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

$$c) z_B = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) e^{i\frac{5\pi}{12}} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) = 2 - \sqrt{3} + i$$

$$\text{Donc } (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} \text{ et } (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

SIGMATS

All right reserved for Sigmaths.tk