DC$_2$ corrigé 3M A.S : 22/23.

Exercice N°1 : (1)×5

1/ Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_1 = 3$ et $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2 < W_n < 4$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

a) Demontrons par récurrence P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 < W_n < 4$ »

pour $n = 1$ $\quad 2 < W_1 = 3 < 4$ d'où P_1 est vraie.

supposons que $2 < W_n < 4$ et montrons que $2 < W_{n+1} < 4$.

$2 < W_n < 4 \rightarrow -4 < -\frac{8}{W_n} < -2 \rightarrow 2 < 6 - \frac{8}{W_n} < 4 \rightarrow 2 < W_{n+1} < 4$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 < W_n < 4$

b) Demontrons par recurrence P_n « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$ ».

pour $n = 1$ $\quad W_1 = 3$ et $\frac{2(1+2^1)}{1+2^{1-1}} = \frac{2\times 3}{2} = 3$ d'où P_1 est vraie

supposons que $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$ et montrons que $W_{n+1} = \frac{2(1+2^{n+1})}{1+2^n}$

$$W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n} = 6 - \frac{8(1+2^{n-1})}{2(1+2^n)} = 6 - \frac{4(1+2^{n-1})}{1+2^n} = \frac{6+6\times 2^n - 4 - 4\times 2^{n-1}}{1+2^n} = \frac{2+3\times 2^{n+1} - 2^{n+1}}{1+2^n} = \frac{2(1+2^{n+1})}{1+2^n}$$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$.

2/ a/ Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{3k} - 1$ est divisible par 7.

b/ En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{3k+1} - 4$ est divisible par 7 et $4^{3k+2} - 2$ est divisible par 7

c/ Quelle est le reste de la division euclidienne de 4^{2023} par 7 ?

2) a) Demontrons par récurrence P_k : « $\forall k \in \mathbb{N}$, $4^{3k} - 1 \in \dot{7}$ »

par $k = 0$ $\quad 4^{3\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 \in \dot{7}$ d'où P_0 est vraie.

supposons que $4^{3k} - 1 \in \dot{7}$ et mq : $4^{3k+3} - 1 \in \dot{7}$.

$$4^{3k+3} - 1 = 4^3 \times 4^{3k} - 1 = 64(\underbrace{4^{3k} - 1}_{\in \dot{7}}) + \underbrace{7\times 9}_{\in \dot{7}} \in \dot{7}$$

conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $4^{3k} - 1 \in \dot{7}$.

b) $4^{3k+1} - 4 = 4(4^{3k} - 1) \in \dot{7}$.

$4^{3k+2} - 2 = 16(4^{3k} - 1) + 14 \in \dot{7}$

c) on a : $2023 = 3\times 674 + 1$ donc $4^{2023} - 4 \in \dot{7}$ donc $\underline{r = 4}$.

Exercice N°2 :

A/ a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ f est une fonction polynôme donc elle est continue et derivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ $\quad \lim_{+\infty} f = -\infty$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$ $\quad f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

1

A/ Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$
a/ Dresser le tableau de variation de f.
b/Donner une équation de la tangente Δ à la courbe C_f au point d'abscisse 1
c/ Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.
Que peut-on conclure pour le point I(1,-1) ?
d/ Tracer la courbe C_f.

b) $f'(1) = 3 \quad f(1) = -1$ donc $\Delta : y = 3x - 4$. 0,5

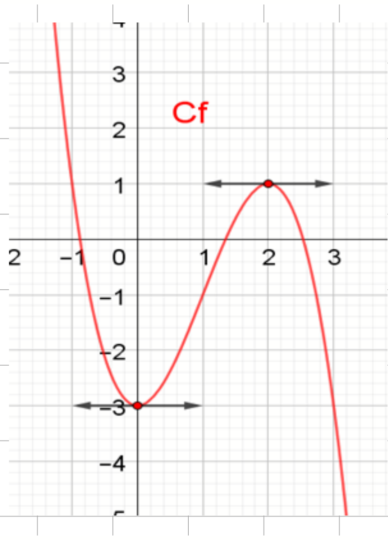
c) $f(x) - (3x-4) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(3x-4)$		$+$	0	$-$	
P.R		$\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ		$\mathcal{C}_f$ au dessous de Δ	

$\mathcal{C} \cap \Delta = \{I(1,-1)\}$

1

Le point I est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.



1

B/ $g(x) = \dfrac{-2x^2+3x+3}{x-1}$

a) $\forall x \neq 1,\ g(x) = \dfrac{-2x(x-1)+(x-1)+4}{x-1} = -2x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$. 0,5

B/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{-2x^2+3x+3}{x-1}$
a/ Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $g(x) = -2x + 1 + \frac{4}{x-1}$
b/ Déterminer les asymptôtes de la courbe C_g.
c/ Dresser le tableau de variation de g
d/ Tracer, dans le même repère que C_f, la courbe C_g .

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{1^-} g = -\infty \\ \lim\limits_{1^+} g = +\infty\end{array}\right\} \longrightarrow$ La droite d'équation : $x = 1$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_g$. 1

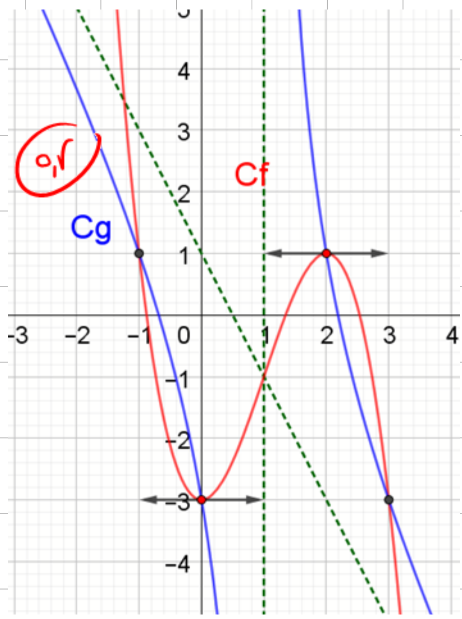
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (g(x) - (-2x+1)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$ Alors

la droite $\Delta : y = -2x+1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ au v. de $\pm\infty$.

c) $D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ alors elle est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty \quad \lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

$g'(x) = -2 - \dfrac{4}{(x-1)^2} < 0$ 1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	$-\infty$



0,5

c) a) $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g = \{A(0,-3);\ B(3,-3);\ C(2,1);\ D(-1,1)\}$

donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1, 0, 2, 3\}$ 0,5

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \quad \vec{DC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \vec{AB} \quad \dfrac{A, B \text{ et } C}{\text{non alignés}}$ ABCD est un //.

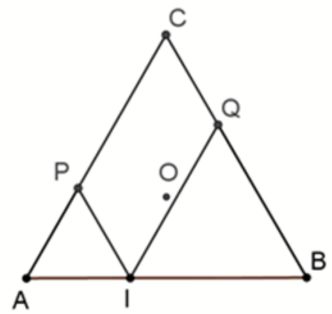
$p = 2(AB + BC) = 2(3 + \sqrt{17}) = 6 + 2\sqrt{17}$. 1

$\mathcal{A} = AB \times d(A,(CD)) = 3 \times 4 = 12$.

C/ a/ Par lecture graphique, résoudre dans IR, l'équation : $f(x) = g(x)$.
b/ Vérifier que les points d'intersection des deux courbes C_f et C_g sont les sommets d'un parallélogramme.
Calculer son périmétre ainsi que son aire.

Exercice N° 3 :

1) $\left.\begin{array}{l}\hat{BAC} = \hat{IAP} = \frac{\pi}{3} \\ \hat{ABC} = \hat{IBQ} = \frac{\pi}{3}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ ABC est équilatéral. 0,5



1/ Montrer que le triangle ABC est équilatéral. On désigne par O son centre.

2/ On désigne par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a/ Préciser r(B) et r(P).

b/ En déduire que BP = AQ

c/ Montrer que $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}) \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]$

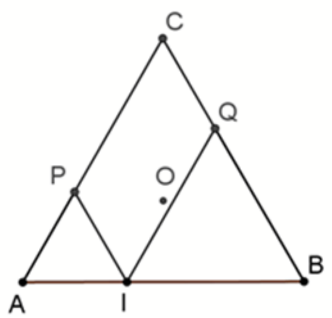
2/ a) IBQ est équilatéral direct donc $\begin{cases} IB = IQ \\ (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IQ}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow r(B) = Q$

IPA est équilatéral direct donc $\begin{cases} IP = IA \\ (\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow r(P) = A$ 1

b) $(r(B) = Q$ et $r(P) = A) \longrightarrow BP = AQ$. 0,5

c) $(r(B) = Q$ et $r(P) = A) \longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{QA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\longrightarrow \pi + (\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ 0,5



3/ On désigne par r' la rotation d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et qui envoie B en A.

a/ Déterminer le centre de r'.

b/ Vérifier que r'(A) = C.

c/ Montrer que r'(P) = Q

3/ a) posons $r' = r_{(\Omega, -\frac{2\pi}{3})}$

$r(B) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega B = \Omega A \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

or ABC est équilatéral de centre O et de sens direct donc: 1

$\begin{cases} OB = OA \\ (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ alors $\Omega = O$

d'où $r' = r_{(O, -\frac{2\pi}{3})}$

b) ABC équilatéral direct de centre O donc $\begin{cases} OA = OC \\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ 0,5

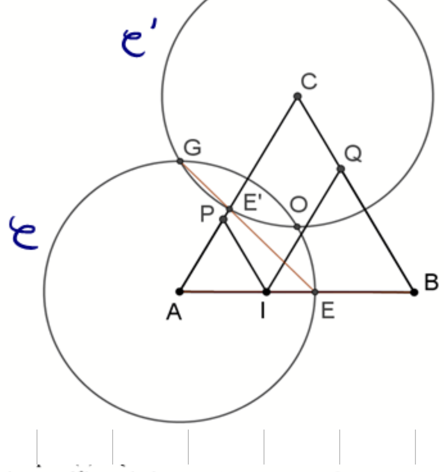
$\longrightarrow r'(A) = C$

c) Posons $r'(P) = Q'$.

$\left.\begin{matrix} r'(P) = Q' \\ r'(B) = A \end{matrix}\right\} \longrightarrow BP = AQ' \xrightarrow{BP = AQ} AQ' = AQ$ 1

$P \in [AC] \longrightarrow r'(P) \in r'\langle[AC]\rangle \longrightarrow Q' \in [CB] \xrightarrow{Q \in [CB]} (\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ'}}) \equiv 0[2\pi]$

$\longrightarrow \overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{AQ} \longrightarrow Q' = Q$ d'où $r'(P) = Q$



4/ On désigne par 𝒞 le cercle de centre A et passant par O.

Déterminer l'image 𝒞' de 𝒞 par r'.

5/ Le cercle 𝒞 coupe [AB] en E et 𝒞' coupe [AC] en E'.

a/ Montrer que r'(E) = E'

b/ Les cercles 𝒞 et 𝒞' se recoupent en G. Montrer que les points G, E et E' sont alignés.

4/ $r'(A) = C$ donc $r'\langle\mathscr{C}\rangle = \mathscr{C}_{(C, OA)} = \mathscr{C}_{(C, OC)}$ d'où $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_{(C, OC)}$ 0,5

5/ a) $\{E\} = \mathscr{C} \cap [AB] \longrightarrow \{r'(E)\} = r'\langle\mathscr{C}\rangle \cap r'\langle[AB]\rangle$

$\longrightarrow \{r'(E)\} = \mathscr{C}' \cap [CA] = \{E'\}$ d'où $r'(E) = E'$ 0,75

b) $2(\widehat{\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GE'}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GO}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{GO}, \overrightarrow{GE'}})\ [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE'}})\ [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}})\ [2\pi]$ 0,75

$\equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \equiv 0\ [2\pi]$

$\longrightarrow$ E, E' et G sont alignés