L. Privé.Ibn Khaldoun Kairouan	Devoir de Contrôle N°2	Prof : Chouihi
Le : 13-02-23	Durée : 2heures	Classe : 3M

Exercice N°1 (5 points)

NB : Les questions 1/ et 2/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_1 = 3$ et $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2 < W_n < 4$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

2/ a/ Montrer par récurrence que pour tout $k \in IN$, $4^{3k} - 1$ est divisible par 7.

b/ En déduire que pour tout $k \in IN$, $4^{3k+1} - 4$ est divisible par 7 et $4^{3k+2} - 2$ est divisible par 7

c/ Quelle est le reste de la division euclidienne de 4^{2023} par 7 ?

Exercice N°2 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A/ Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$

a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/Donner une équation de la tangente Δ à la courbe C_f au point d'abscisse 1

c/ Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.
Que peut-on conclure pour le point I(1,-1) ?

d/ Tracer la courbe C_f.

B/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{-2x^2+3x+3}{x-1}$

a/ Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $g(x) = -2x + 1 + \frac{4}{x-1}$

b/ Déterminer les asymptôtes de la courbe C_g.

c/ Dresser le tableau de variation de g

d/ Tracer, dans le même repère que C_f, la courbe C_g .

C/ a/ Par lecture graphique, résoudre dans IR, l'équation : f(x) = g(x).

b/ Vérifier que les points d'intersection des deux courbes C_f et C_g sont les sommets d'un parallèlogramme.
Calculer son périmétre ainsi que son aire.

Exercice N°3 (7 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un segment [AB] et un point I de [AB] distinct de A et B. On construit les triangles équilatéraux directs AIP et IBQ. Les droites (AP) et (BQ) se coupent en C.

1/ Montrer que le triangle ABC est équilatéral. On désigne par O son centre.

2/ On désigne par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a/ Préciser r(B) et r(P).

b/ En déduire que BP = AQ

c/ Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3} [2\pi]$

3/ On désigne par r' la rotation d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et qui envoie B en A.

a/ Déterminer le centre de r'.

b/ Vérifier que r'(A) = C.

c/ Montrer que r'(P) = Q

4/ On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par O.
Déterminer l'mage $\mathscr{C}$' de $\mathscr{C}$ par r'.

5/ Le cercle $\mathscr{C}$ coupe [AB] en E et $\mathscr{C}$' coupe [AC] en E'.

a/ Montrer que r'(E) = E'

b/ Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' se recoupent en G. Montrer que les points G, E et E' sont alignés.