Devoir de contrôle N°2

3M

L.Privé Ibn khaldoun

A.S: 2021-2022

Prof: Chouihi

Exercice N°1

Exercice N°1

1) a) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2,+\infty[$ 0,25

b) f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-2]$, $[-2,2[$, $]2,4]$ et $]4,+\infty[$ 0,5

2) a) $f'(-3)=-2$ $f'_g(-2)=-\frac{1}{2}$ $f'_d(-2)=\frac{1}{2}$ $f'(0)=0$ 1

b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)-1}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'_g(4)=0$ 0,75

$\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{f(x)-1}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = +\infty$

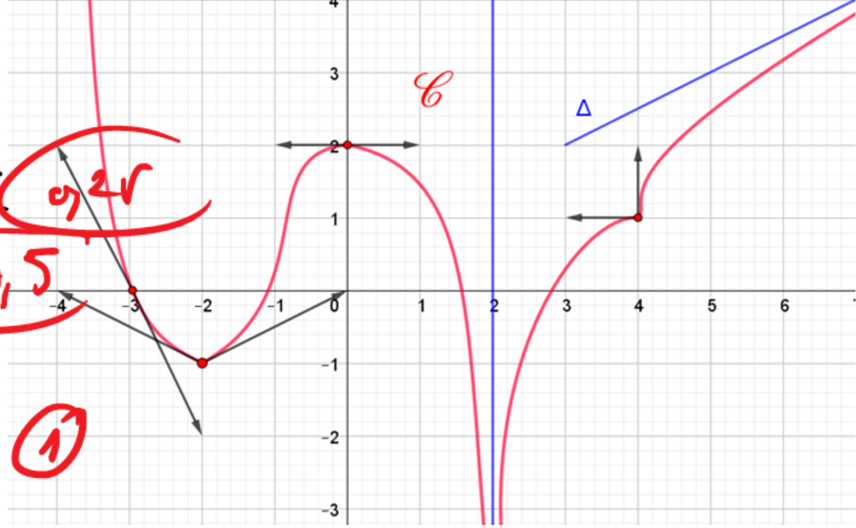
3) a) $\frac{5f(x)+2x+6}{x+3} = 5\left[\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right]+2$ 0,5

or $\lim\limits_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = f'(-3)=-2$ donc $\lim\limits_{x\to -3} \frac{5f(x)+2x+6}{x+3} = -8$

b) $\Delta : y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$ or $f(x)-x = f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-x=-\infty$ 0,5



1/ Déterminer :

a/ Les intervalles sur les quels f est continue.

b/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer sans justification :

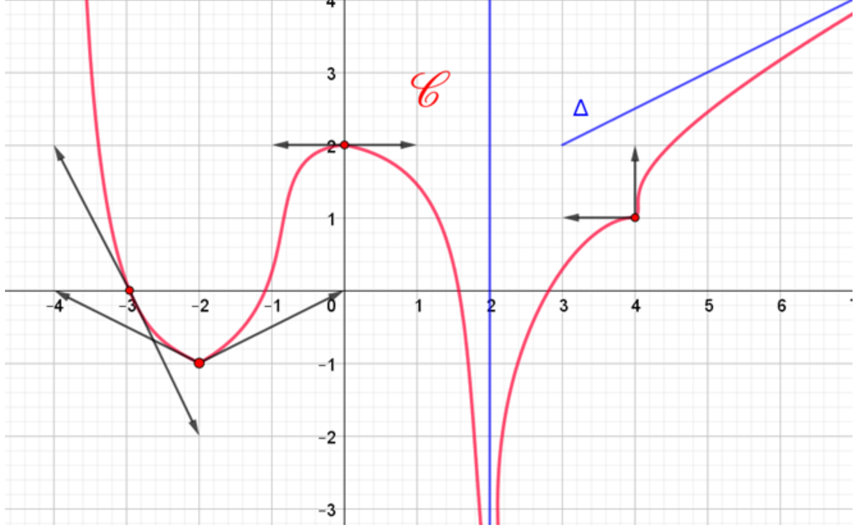
a/ $f'(-3)$; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; $f'(0)$.

b/ $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{5f(x)+2x+6}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-x$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$



1/ Déterminer :

a/ Les intervalles sur les quels f est continue.

b/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer sans justification :

a/ f '(-3) ; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; f '(0).

b/ $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{5f(x)+2x+6}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$

c) $\frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2} = \left[\frac{f(x)+1}{x+2}\right]^2 = \left[\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\right]^2$

or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-2}\left[\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\right]^2 = \frac{1}{4}$

$\to \lim\limits_{x\to-2}\frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{4}$

0,5

Exercice N°2

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 - x} + x & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 4 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite Δ d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞. Etudier la position relative de C par rapport à Δ pour x > 1.

3/ a/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 1[$ et calculer f '(x) pour x < 1 .

b/ Justifier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$ et calculer f '(x) pour x > 0.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse x < 1, parallèle à la droite Δ : **3x − 4y = 0** . (On donnera les coordonnées du point de contact)

1) a) cont en 1 ? $f(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x-4}{x-2} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2-x} + x = 1 = f(1)$$

$\Rightarrow \lim_{1} f = f(1)$

0,5

$\rightarrow$ f est continue en 1.

b) dub en 1 ? posons $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$, $x \neq 1$

pour $x < 1$ $\quad \varphi(x) = \dfrac{\frac{x^2+2x-4}{x-2} - 1}{x-1} = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x-2)}$

1,5

$\rightarrow \varphi(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2} \rightarrow \lim_{1^-} \varphi = -3$ donc f est dérivable en 1^- et $f'_g(1) = -3$.

pour $x > 1$ $\quad \varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x} + x - 1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} + 1 = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}} + 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}} + 1$

$\rightarrow \lim_{1^+} \varphi = +\infty$ alors f n'est pas dérivable en 1^+

Concl : f n'est pas dérivable en 1.

I.G : $\mathcal{C}$ admet au point (1, 1) deux demi-tg $\mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = -3x+4 \\ x \leq 1 \end{cases}$ et $\mathcal{E}'_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2-x}+x & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 4$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite Δ d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$. Etudier la position relative de C par rapport à Δ pour $x > 1$.

3/ a/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$.

b/ Justifier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse $x < 1$, parallèle à la droite Δ : $3x - 4y = 0$. (On donnera les coordonnées du point de contact)

2) a) • $\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$ 0,5

• pour $x < 1$ $f(x) - (x+4) = \frac{x^2+2x-4-(x-2)(x+4)}{x-2}$

$\Rightarrow f(x) - (x+4) = \frac{4}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+4) = 0$ 0,5

Alors la droite d'équation : $y = x+4$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b) $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}+x = +\infty$ 0,5

pour $x > 1$ $f(x) - (2x - \frac{1}{2}) = \sqrt{x^2-x} - x + \frac{1}{2} = \frac{x^2-x-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x}+x-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-x}+x-\frac{1}{2}}$ 0,5

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x - \frac{1}{2}) = 0$ alors la droite d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

• pour $x > 1$ $f(x) - (2x - \frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-x}+x-\frac{1}{2}} < 0$ donc C est au dessous de Δ pour tout $x > 1$ 0,25

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2-x}+x & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 4$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b/ Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite Δ d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$. Etudier la position relative de C par rapport à Δ pour $x > 1$.

3/ a/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$.

b/ Justifier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C, d'abscisse $x < 1$, parallèle à la droite $\Delta : 3x - 4y = 0$. (On donnera les coordonnées du point de contact)

3) a) pour $x \in]-\infty, 1[$ $\quad f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x-2}$

. La fonction : $x \mapsto \frac{x^2+2x-4}{x-2}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors elle est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et en particulier sur $]-\infty, 1[$ $\Rightarrow$ f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

0,5

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x-4)}{(x-2)^2}$$

d'où $f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

0,5

b) pour $x \in]1, +\infty[$: $f(x) = \sqrt{x^2-x} + x$

. La fct : $x \mapsto x^2-x$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$ alors la fct : $x \mapsto \sqrt{x^2-x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

0,5

. la fct : $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} + 1$.

0,5

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 - x} + x & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 4$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite Δ d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$. Etudier la position relative de C par rapport à Δ pour $x > 1$.

3/ a/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 1[$ et calculer f '(x) pour $x < 1$.

b/ Justifier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$ et calculer f '(x) pour $x > 0$.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse $x < 1$, parallèle à la droite $\Delta : \ 3\mathbf{x} - \mathbf{4y} = \mathbf{0}$. (On donnera les coordonnées du point de contact)

4) pour $x < 1$

$\mathcal{C}_f \parallel \Delta : y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2-16x = 3x^2-12x+12$

$\Leftrightarrow x^2-4x = 12 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4^2$

0,75

$\Leftrightarrow \cancel{x = 6} > 1$ ou $x = -2 < 1$

$f(-2) = 1$ donc le point de contact a pour coordonnées $(-2, 1)$

Exercice N°3

1/ Recopiez sur votre copie le tableau suivant puis le compléter :

Coordonnées cartésiennes	A(-2, 2)	B$(-1,\sqrt{3})$	C$(3,\sqrt{3})$	D$(-4,4)$
Coordonnées polaires	A$[2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$	B$[2,\frac{2\pi}{3}]$	C$[2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}]$	D$[4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]$

1

2/ a/ Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\sin x(2\sin x - 1) = 0$

b/ Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation : $\sin x(2\sin x - 1) \geq 0$

2) a) $\begin{cases} \sin x(2\sin x-1)=0 \\ x\in[0,2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0 \text{ ou } \sin x=\frac{1}{2} \\ x\in[0,2\pi[\end{cases}$ d'où $S_{[0,2\pi[}=\{0,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\pi\}$ 1

b)

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		π		2π
$\sin x$	0	+	|	+	|	+	0	−	||
$2\sin x-1$		−	0	+	0	−	|	−	||
produit	0	−	0	+	0	−	0	+	||

1

d'où $S_{[0,2\pi[}=[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]\cup[\pi,2\pi[\cup\{0\}$

3/ Montrer que pour tous réels a et b on a : $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \end{cases}$$

1

$\xrightarrow{(+)}$ $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$

en posant $\begin{cases} a = x+y \\ b = x-y \end{cases}$ on obtient : $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Exercice N°4

1/ Montrer que pour tout réel x, on a : $cos^2x - 3sin^2x = 4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2/ a/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

b/ En déduire que pour tout réel x, $4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2cos2x - 1$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\cos^2x - 3\sin^2x).\tan(x-\frac{\pi}{3})$

a/ Déterminer le domaine de définition D de f.

b/ Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

En déduire que pour tout $x \in D$, $f(x) = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$

c/ Calculer $f(\frac{3\pi}{8})$ et en déduire que $\tan(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

4/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l' équation : $\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sin(2x) = 1$

1) $4\cos(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3}) =$

$4\left[\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right]\left[\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right] =$ 0,5

$4\left[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right]\left[\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right] = \cos^2 x - 3\sin^2 x$

d'où $\cos^2 x - \sin^2 x = 4\cos(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3})$

2) a) $\begin{cases}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\end{cases}$ 0,5

$\xrightarrow{(+)}$ $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

b) En appliquant a/ pour $a = x-\frac{\pi}{3}$ et $b = x+\frac{\pi}{3}$ on obtient :

$2\cos(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos(2x) + \cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos 2x - \frac{1}{2}$ 0,5

$\xrightarrow{\times 2}$ $4\cos(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3}) = 2\cos 2x - 1$

1/ Montrer que pour tout réel x, on a : $cos^2x - 3sin^2x = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2/ a/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

b/ En déduire que pour tout réel x, $4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2cos2x - 1$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\cos^2x - 3\sin^2x).\tan(x - \frac{\pi}{3})$

a/ Déterminer le domaine de définition D de f.

b/ Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

En déduire que pour tout $x \in D$, $f(x) = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$

c/ Calculer $f(\frac{3\pi}{8})$ et en déduire que $\tan(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

4/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l' équation : $\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sin(2x) = 1$

3) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}$ tq : $x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 0,5

b) $f(x) = (\cos^2x - 3\sin^2x)\tan(x - \frac{\pi}{3})$

$= 4\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3})\dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{\cos(x - \frac{\pi}{3})}$ 0,5

$\Longrightarrow f(x) = 4\cos(x + \frac{\pi}{3})\sin(x - \frac{\pi}{3})$

$f(x) = 4\cos(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = 4\cos(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{5\pi}{6})$ 0,5

$= 2\left[\cos\left[(x + \frac{\pi}{3}) + (x - \frac{5\pi}{6})\right] + \cos\left((x + \frac{\pi}{3}) - (x - \frac{5\pi}{6})\right)\right]$

$= 2\left[\cos(2x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{6})\right] = 2\left[\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ d'où $f(x) = 2\sin 2x - \sqrt{3}$

Chouihi lotfi

1/ Montrer que pour tout réel x, on a : $cos^2x - 3sin^2x = 4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2/ a/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

b/ En déduire que pour tout réel x, $4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2cos2x - 1$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\cos^2x - 3\sin^2x).\tan(x - \frac{\pi}{3})$

a/ Déterminer le domaine de définition D de f.

b/ Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

En déduire que pour tout $x \in D$, $f(x) = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$

c/ Calculer $f(\frac{3\pi}{8})$ et en déduire que $\tan(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

4/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l' équation : $\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sin(2x) = 1$

c) $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{3}$ d'où $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ 0,5

$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \left(\cos^2\frac{3\pi}{8} - 3\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2} - 3\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$

$= \left(-1 + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = (-1-\sqrt{2})\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Alors : $(-1-\sqrt{2})\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 = \tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$

0,5

1/ Montrer que pour tout réel x, on a : $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2/ a/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

b/ En déduire que pour tout réel x, $4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos 2x - 1$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\cos^2 x - 3\sin^2 x).\tan(x-\frac{\pi}{3})$

a/ Déterminer le domaine de définition D de f.

b/ Montrer que pour tout $x\in D$, $f(x) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

En déduire que pour tout $x\in D$, $f(x) = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$

c/ Calculer $f(\frac{3\pi}{8})$ et en déduire que $\tan(\frac{\pi}{24}) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

4/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l' équation : $\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sin(2x) = 1$

1

4) ds $[0,\pi]$

$\cos 2x - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}\sin 2x = 1 \iff$

$\cos 2x - \tan\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin 2x = 1 \iff$

$\cos\frac{\pi}{24}\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin 2x = \cos\frac{\pi}{24} \iff$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \iff$

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{24} = -\frac{\pi}{24} + 2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

d'où $S_{[0,\pi]} = \left\{0, \frac{23\pi}{24}, \pi\right\}$