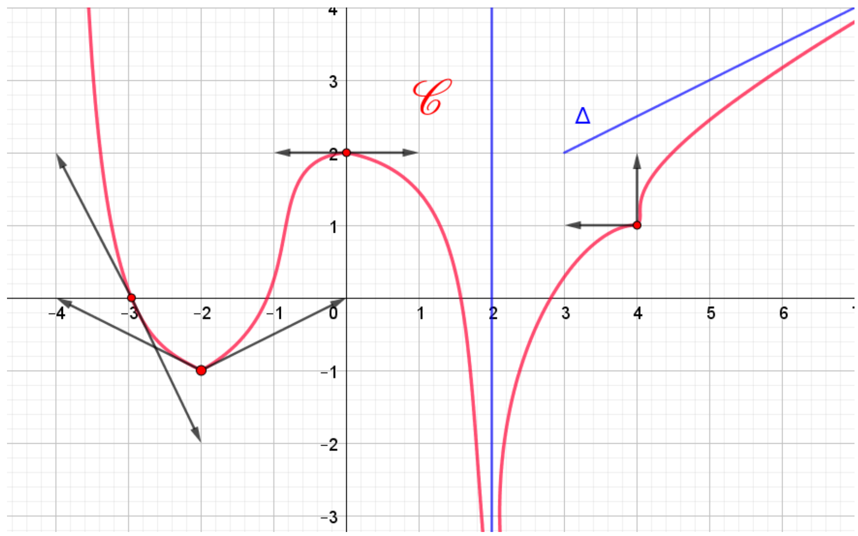
Exercice N°1 (4 points)

Dans la figure ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR\{2}.



Par lecture graphique :

1/ Déterminer :

a/ Les intervalles sur les quels f est continue.

b/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer sans justification :

a/ f '(-3) ; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; f '(0).

b/ $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{5f(x)+2x+6}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$

Exercice N°2 (7 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2-x}+x & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 4 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite Δ d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞. Etudier la position relative de C par rapport à Δ pour x > 1.

3/ a/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-\infty, 1[$ et calculer f '(x) pour x < 1 .

b/ Justifier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$ et calculer f '(x) pour x > 0.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse x < 1, parallèle à la droite $\Delta : 3x - 4y = 0$. (On donnera les coordonnées du point de contact)

Exercice N°3 (4 points)

NB : Les questions 1) 2) 3) de cet exercice sont indépendantes

1/ Recopiez sur votre copie le tableau suivant puis le compléter :

Coordonnées cartésiennes	A(-2, 2)		C(3,$\sqrt{3}$)	
Coordonnées polaires		B[2, $\frac{2\pi}{3}$]		D[4$\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$]

2/ a/ Résoudre dans [0, 2π[l'équation : sinx(2sinx – 1) = 0

b/ Résoudre dans [0, 2π[l'inéquation : sinx(2sinx – 1) $\geq$ 0

3/ Montrer que pour tous réels a et b on a : $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Exercice N°4 (5 points)

1/ Montrer que pour tout réel x, on a : $cos^2x - 3sin^2x = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2/ a/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

b/ En déduire que pour tout réel x, $4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2cos2x - 1$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\cos^2 x - 3\sin^2 x).\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

a/ Déterminer le domaine de définition D de f.

b/ Montrer que pour tout x$\in$D, $f(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

En déduire que pour tout x$\in$D, f(x) = 2sin(2x) – $\sqrt{3}$

c/ Calculer $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et en déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

4/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l' équation : $\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sin(2x) = 1$