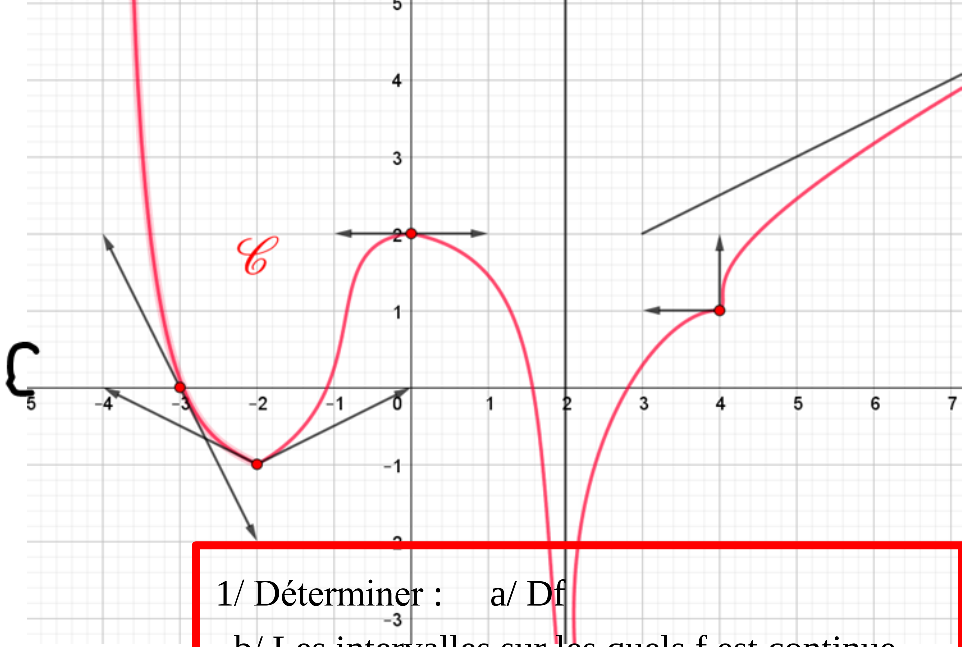
Devoir de contrôle N°2

3M$_2$

L.Pilote Kairouan

A.S: 2020-2021

Exercice N°1



1/ Déterminer : a/ Df

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ $f'(-3)$; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; $f'(0)$.

b/ $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2f(x)-x-3}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

1) a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,2[$ et $]2,+\infty[$

c) f est dérivable sur $]-\infty,-2]$; $[-2,2[$; $]2,4]$ et $]4,+\infty[$

2) a) $f'(-3)=-2$ $\quad f'_g(-2)=-\frac{1}{2}$ $\quad f'_d(-2)=\frac{1}{2}$

$f'(0)=0$

b) $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)-1}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'_g(4)=0$

$\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-1}{x-4}=\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=+\infty$

3) a) $\frac{2f(x)-x-3}{x+3}=2\left[\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right]-1$

et comme $\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=f'(-3)=-2$ donc $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2f(x)-x-3}{x+3}=-5$

• $\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}{x} = \left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right] \times \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{2}}$

or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f(x)}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

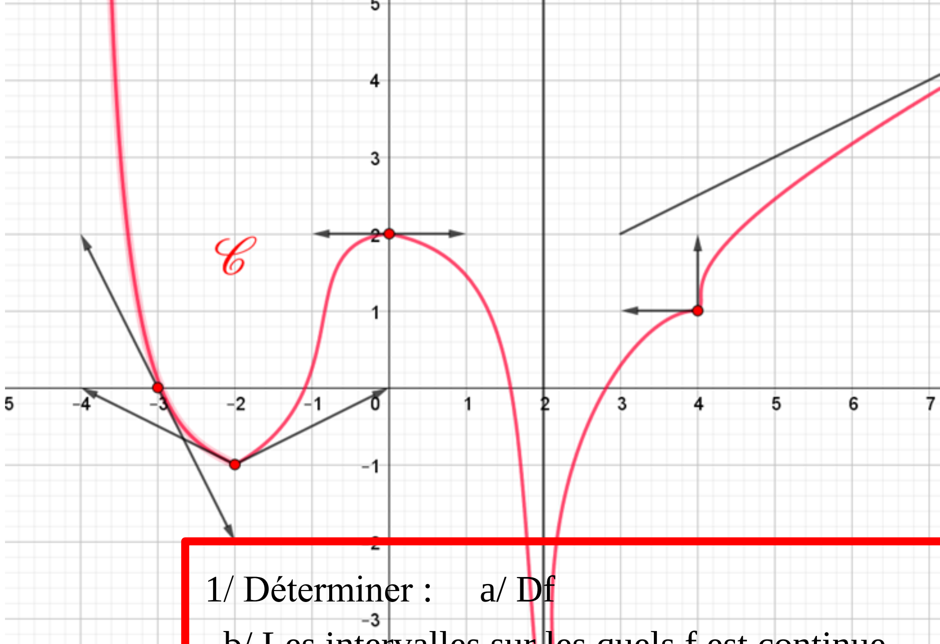
donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}{x} = 0$

• $\dfrac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2} = \left[\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\right]^2$ et comme

$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = f'_d(-2) = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)^2+2f(x)+1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ car $\mathscr{C}_f$ admet une B.P de dir celle de (yy') en $-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$ car $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique de pente $\dfrac{1}{2}$ en $+\infty$



1/ Déterminer : a/ D_f

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ $f'(-3)$; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; $f'(0)$.

b/ $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2f(x)-x-3}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Exercice N°2

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-3}{x-2} & \text{si } x<1\\ \sqrt{x^2+2x-2} & \text{si } x>1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$

et calculer f '(x) pour $x < 1$.

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et calculer f '(x) pour $x > 1$.

3/ Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite $\Delta :\ \mathbf{x - y - 3 = 0}$?

---

1) a) dérivb en 1 ! posons $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $x\neq 1$

pour $x<1$: $\varphi(x)=\dfrac{\dfrac{x^2+x-3}{x-2}-1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{x+1}{x-2}$ donc $\lim\limits_{1^-}\varphi=-2$

alors f est dérivable en 1^- et $f'_g(1)=-2$.

pour $x>1$: $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-2}-1}{x-1}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)(\sqrt{x^2+2x-2}+1)}$

$\to \varphi(x)=\dfrac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x-2}+1}$ donc $\lim\limits_{1^+}\varphi=2$

donc f est dérivable en 1^+ et $f'_d(1)=2$

$f'_d(1)\neq f'_g(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1.

I.G : $\mathscr{C}_f$ admet au point $(1,1)$ deux demi-tangentes $T_1:\begin{cases}y=-2x+3\\ x\leq 1\end{cases}$

et $T'_1:\begin{cases}y=2x-1\\ x\geq 1\end{cases}$

Chouihi lotfi

b). $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$.

• $f(x)-(x+3) = \dfrac{x^2+x-3-(x-2)(x+3)}{x-2} = \dfrac{3}{x-2}$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$ alors la droite d'éq : $y = x+3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au vois de $-\infty$

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-2} = +\infty$

• $f(x)-(x+1) = \dfrac{x^2+2x-2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-2}+(x+1)} = \dfrac{-3}{\sqrt{x^2+2x-2}+(x+1)}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$ alors la droite d'éq : $y = x+1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-3}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+2x-2} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 3 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de - ∞.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 1 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de + ∞.

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

et calculer f '(x) pour x < 1 .

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$

et calculer f '(x) pour x > 1.

3/ Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite
Δ : $\mathbf{x - y - 3 = 0}$?

2/ a) pour $x \in]-\infty, 1[$: $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{x-2}$

La restriction de f à $]-\infty,1[$ est celle d'une fonction rationnelle définie sur $]-\infty,1[$ alors f est dérivable sur $]-\infty,1[$.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

b) La fct : $x \mapsto x^2+2x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ alors f est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-3}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+2x-2} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$.

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et calculer $f'(x)$ pour $x > 1$.

3/ Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite
$\Delta : \mathbf{x - y - 3 = 0}$?

3) $\Delta : y = x - 3$. $T_x \parallel \Delta \Leftrightarrow f'(x) = 1$

<u>pour $x < 1$</u> $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow 1 = 4$ imp.

<u>pour $x > 1$</u> $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 + 2x - 2}$

$\xLeftrightarrow{x+1 \geq 0} x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow 1 = -2$ imp

en plus $f'_g(1) = -2 \neq 1$ et $f'_d(1) = 2 \neq 1$

donc il n'existe aucune t_g à $\mathscr{C}_f \parallel \Delta$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-3}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+2x-2} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$.

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$

et calculer $f'(x)$ pour $x > 1$.

3/ Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite
$\Delta : \mathbf{x - y - 3 = 0}$?

Exercice N°3

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^{3n} - 1$ est divisible par 9.

b) En déduire que les entiers $4^{3n+1} - 4$; $4^{3n+2} - 7$ sont divisibles par 9.

c) On pose $A = 6 + 4^{2019} + 4^{2020} + 4^{2021}$. Montrer que : A est divisible par 9.

1) a) Demontrons par recurrence

P_n « $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_9$ »

<u>pour n = 0</u> $\quad 4^{3\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 \in \mathcal{M}_9$ d'où P_0 est vraie

supposons que $4^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_9$ et mq : $4^{3n+3} - 1 \in \mathcal{M}_9$

$$4^{3n+3} - 1 = 4^3\underbrace{(4^{3n} - 1)}_{\in \mathcal{M}_9} + \underbrace{63}_{\in \mathcal{M}_9} \in \mathcal{M}_9$$

concl $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_9$.

b) • $4^{3n+1} - 4 = 4\underbrace{(4^{3n} - 1)}_{\in \mathcal{M}_9} \in \mathcal{M}_9$ $\qquad$ • $4^{3n+2} - 7 = 16(4^{3n} - 1) + 9 \in \mathcal{M}_9$

c) $A = (4^{2019} - 1) + (4^{2020} - 4) + (4^{2021} - 7) + 18$ or $2019 = 3\times 673$ donc,

d'après a) et b) $4^{2019} - 1 \in \mathcal{M}_9$, $4^{2020} - 4 \in \mathcal{M}_9$ et $4^{2021} - 7 \in \mathcal{M}_9$ et $18 \in \mathcal{M}_9$ donc $A \in \mathcal{M}_9$

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Demontrons par recurrence P_n « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

pour n = 1 $\left\{ \begin{array}{l} S_1 = 1^2 \\ \dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \dfrac{2\times3}{6} = 1 \end{array} \right.$ d'où P_1 est vraie

supposons que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et mq : $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + (n+1)6\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)}{6}\left[2n(n+2)+3(n+2)\right] = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

cl : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple (x,y) d'entiers naturels vérifiant : 167x– 70y =1

$$\begin{array}{r|l}
-31 & \\
13\times & 167 = 70\times 2 + \cancel{27} \\
-5\times & 70 = \cancel{27}\times 2 + \cancel{16} \\
3\times & \cancel{27} = \cancel{16}\times 1 + \cancel{11} \\
-2\times & \cancel{16} = \cancel{11}\times 1 + \cancel{5} \\
 & \cancel{11} = \cancel{5}\times 2 + 1 \\
\hline
\end{array}$$

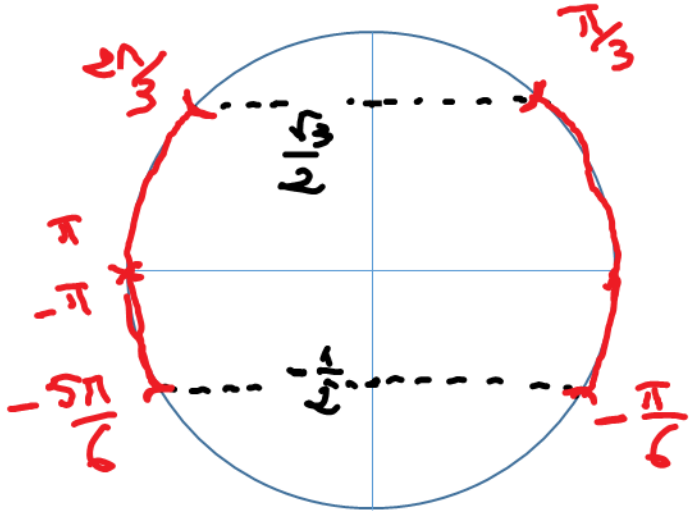
$\xrightarrow{(+)}$ $167\times 13 - 70\times 31 = 1$ $\longrightarrow$ $(x,y)=(13,31)$

Exercice N°4

Coordonnées cartésiennes	$A(2\sqrt{3}, -2)$	$B(-2, 2\sqrt{3})$	C(-5,5)	$D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Coordonnées polaires	$A[4, -\frac{\pi}{6}]$	$B[4, \frac{2\pi}{3}]$	$C[5\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}]$	$D[2, \frac{3\pi}{4}]$

$$\boxed{\text{2/ Résoudre, dans }]-\pi,\pi], \text{ l'inéquation : } -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$



3/ Soit $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(x) = 1 + 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$

b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) a)

$$f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$$

$$= 1 + 2\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

b) $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}] \end{cases} \Longleftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\Longleftrightarrow 2x = \pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{3}$ d'où $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$$4/\ \text{Montrer que : } \tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

$$4)\ \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$= \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$