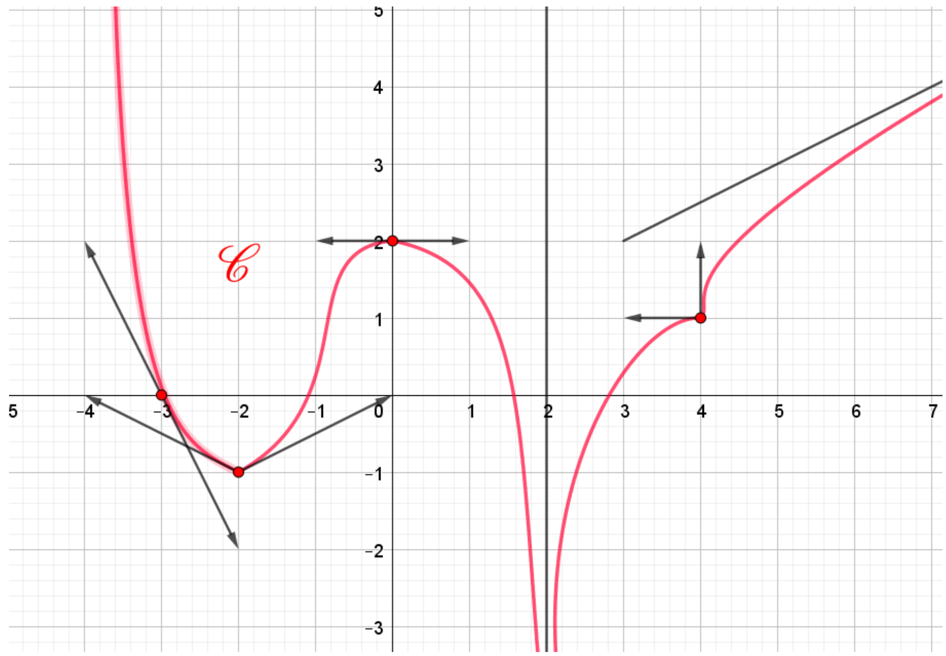
L.P. Kairouan	**Devoir de Contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 08 / 03 /2021	**Durée : 2heures**	**Classe : 3M$_2$**

Exercice N°1 (5 points)



Dans la figure ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f . Par lecture graphique :

1/ Déterminer :

a/ Df

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ f '(-3) ; $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$; f '(0).

b/ $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2f(x)-x-3}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{(f(x))^2+2f(x)+1}{(x+2)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice N°2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-3}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+2x-2} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Intérpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 3 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de - ∞.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 1 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de + ∞.

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer f '(x) pour x < 1 .

b/ Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer f '(x) pour x > 1.

3/ Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite $\Delta :$ $\mathbf{x - y - 3 = 0}$ **?**

Exercice N°3 (5 points)

NB : Les questions 1) 2) 3) de cet exercice sont indépendantes

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^{3n} - 1$ est divisible par 9.
   b) En déduire que les entiers $4^{3n+1} - 4$; $4^{3n+2} - 7$ sont divisibles par 9.
   c) On pose $A = 6 + 4^{2019} + 4^{2020} + 4^{2021}$. Montrer que : A est divisible par 9.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
   Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple (x,y) d'entiers naturels vérifiant : $167x - 70y = 1$

Exercice N°4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Recopiez sur votre copie puis compléter le tableau suivant :

Coordonnées cartésiennes	$A(2\sqrt{3}, -2)$		C(-5,5)	
Coordonnées polaires		$B[4, \frac{2\pi}{3}]$		$D[2, \frac{3\pi}{4}]$

2/ Résoudre, dans]-π,π], l'inéquation : $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3/ Soit $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ pour $x \in IR$.
   a) Montrer que $f(x) = 1 + 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$
   b) Résoudre dans [0,π] l'équation : f(x) = 0

4/ Montrer que pour tous réels a et b tels que a, b et a + b sont différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, on a :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$$