Devoir de contrôle N°2

3M

L.Privé Ibn khaldoun

A.S: 2020-2021

Prof: Chouihi

Exercice N°1

1) a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

c) f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -3]$, $[-3, 1[$, $]1, 3]$ et $]3, +\infty[$

2) a) $f'(-4) = 2$ $\quad f'_g(-3) = \frac{1}{2}$ $\quad f'_d(-3) = -\frac{1}{2}$

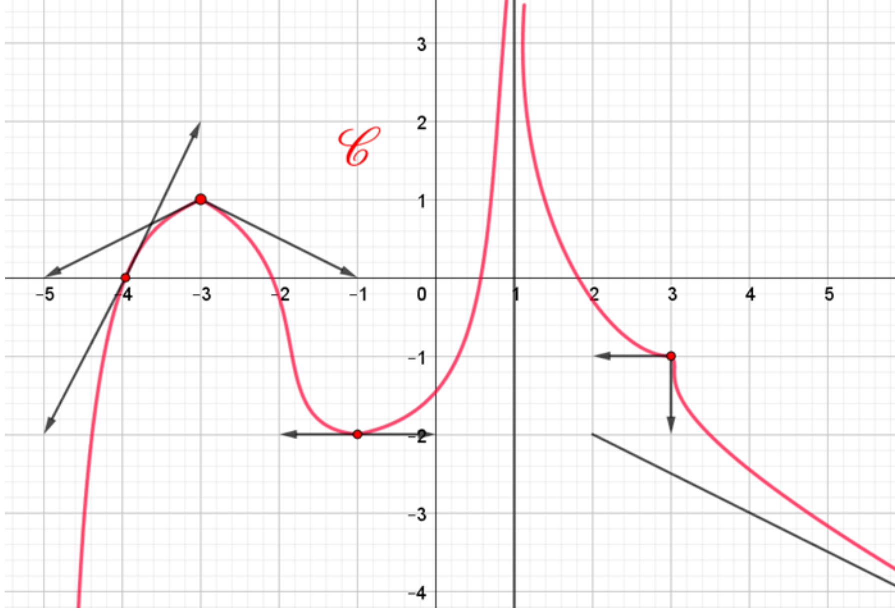
$f'(-1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)+1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'_g(3) = 0$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)+1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = -\infty$

3) a) $\frac{2f(x) - x - 4}{x+4} = 2\left[\frac{f(x) - f(-4)}{x+4}\right] - 1$

or $\lim\limits_{x \to -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4} = f'(-4) = 2$ donc $\lim\limits_{x \to -4} \frac{2f(x) - x - 4}{x+4} = 3$



1/ Déterminer : a/ Df

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ f '(-4) ; $f'_g(-3)$; $f'_d(-3)$; f '(-1).

b/ $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)+1}{x-3}$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)+1}{x-3}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{2f(x)-x-4}{x+4}$ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(f(x))^2+4f(x)+4}{(x+1)^2}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

4/ Dresser le tableau de variation de f.

b) $\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3} = \left[\dfrac{f(x)-1}{x+3}\right] \times \dfrac{1}{(\sqrt{f(x)}+1)}$

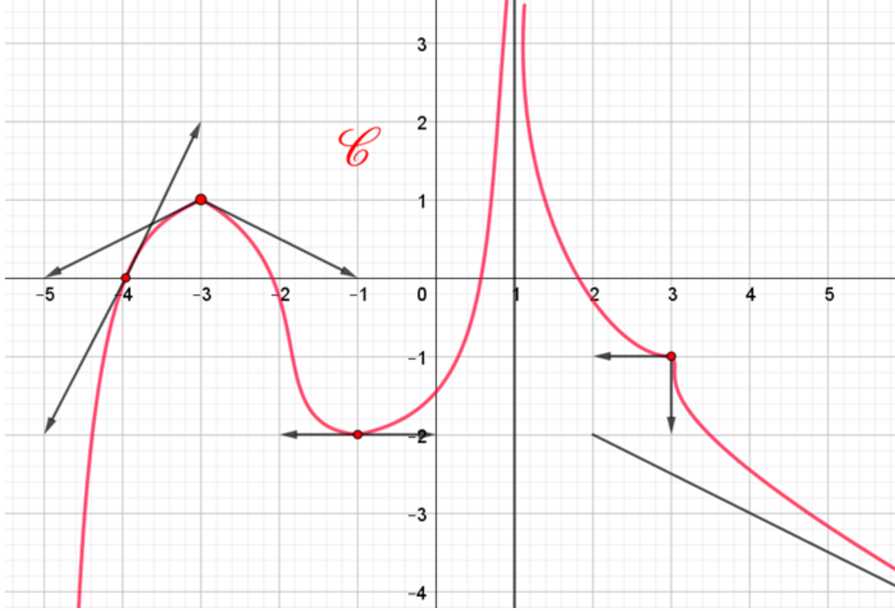
donc $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{(f(x))^2+4f(x)+4}{(x+1)^2} = \left(\dfrac{f(x)+2}{x+1}\right)^2$

or $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)+2}{x+1} = f'(-1)=0$ donc $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(f(x))^2+4f(x)+4}{(x+1)^2}=0$

4)

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$



1/ Déterminer : a/ Df

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ f '(-4) ; $f'_g(-3)$; $f'_d(-3)$; f '(-1).

b/ $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x)-1}{x-4}$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x)-1}{x-4}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2f(x)-x-4}{x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(f(x))^2+4f(x)+4}{(x+1)^2}$

4/ Dresser le tableau de variation de f.

Exercice N°2

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x} + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 5$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

3/a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer f '(x)

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f '(x)

c/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C, d'abscisse $x < 0$, parallèle à la droite $\Delta : 3x - 4y + 13 = 0$

(On donnera les coordonnées du point de contact)

1) a) cont en 0 ? $f(0) = 1$

. $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x^2+x} + x + 1 = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{0} f = 1 = f(0) \Rightarrow$ f est continue en 0.

b) dérivabilité en 0 ? posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $x \neq 0$

pour $x < 0$ $\varphi(x) = \dfrac{\frac{x^2+4x-1}{x-1} - 1}{x} = \dfrac{x^2+3x}{x(x-1)}$

$\rightarrow \varphi(x) = \dfrac{x+3}{x-1} \rightarrow \lim\limits_{0^-} \varphi = -3$ alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -3$.

pour $x > 0$ $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x} + x}{x} = 1 + \dfrac{x\sqrt{1+1/x}}{x} = 1 + \sqrt{1+1/x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

I.G : C admet au point (0,1) deux demi-tangentes :

$T_0 : \begin{cases} y = -3x+1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ et $T'_0 : \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$

2) a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$.

pour $x<0$ $f(x) - (x+5) = \frac{x^2+4x-1}{x-1} - (x+5) = \frac{4}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+5) = 0$ alors la droite d'éq : $y = x+5$

est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

b) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} + x + 1 = +\infty$

pour $x>0$ $f(x) - (2x + \frac{3}{2}) = \sqrt{x^2+x} - (x + \frac{1}{2})$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x} + (x+\frac{1}{2})}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + \frac{3}{2}) = 0$ alors la droite d'équation

$y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au vois de $+\infty$

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x} + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 5$ est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞.

3/a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer f '(x)

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f '(x)

c/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse x < 0, parallèle à la droite $\Delta : 3\mathbf{x} - 4\mathbf{y} + \mathbf{13} = \mathbf{0}$

(On donnera les coordonnées du point de contact)

3) a) La restriction de f à $]-\infty,0[$ est celle d'une fonction rationnelle définie sur $]-\infty,0[$ alors f est dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x-1)-(x^2+4x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

b) • La fonction : $x \mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ alors la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2+x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

• La fonction : $x \longmapsto x+1$ est dérivable sur IR

Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}+1$$

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x^2+x}+x+1 & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = x + 5$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

3/a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer f '(x)

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f '(x)

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C, d'abscisse $x < 0$, parallèle à la droite $\Delta : 3\mathbf{x} - \mathbf{4y} + \mathbf{13} = \mathbf{0}$

(On donnera les coordonnées du point de contact)

$$4) \; T_x \,//\, \Delta : y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4} \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{3}{4}$$

$$\overset{x<0}{\Longleftrightarrow} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 15 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad \text{ou } x = 5 > 0 \text{ (à rejeter)}$$

pour $x = -3$ $\quad y = \frac{3}{4}\times(-3) + \frac{13}{4} = 1$

conclusion : $T_A \,//\, \Delta$ où $A(-3,1)$.

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x} + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 5 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞.

3/a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer f '(x)

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f '(x)

c/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse x < 0, parallèle à la droite $\Delta : 3\mathbf{x} - \mathbf{4y} + \mathbf{13} = \mathbf{0}$

(On donnera les coordonnées du point de contact)

Exercice N°3

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{3n} - 1$ est divisible par 13.

b) En déduire que les entiers $3^{3n+1} - 3$; $3^{3n+2} - 9$ sont divisibles par 13.

c) On pose $A = 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021}$. Montrer que : A est divisible par 13.

1) a) montrons par recurrence

P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_{13}$ »

<u>pour n = 0</u> $\quad 3^{3\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 \in \mathcal{M}_{13}$ d'où P_0 est vraie

supposons que $3^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_{13}$ et mq : $3^{3n+3} - 1 \in \mathcal{M}_{13}$.

$$3^{3n+3} - 1 = 27\underbrace{(3^{3n} - 1)}_{\in \mathcal{M}_{13}} + \underbrace{13 \times 2}_{\in \mathcal{M}_{13}} \in \mathcal{M}_{13}$$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{3n} - 1 \in \mathcal{M}_{13}$.

b) $3^{3n+1} - 3 = 3\underbrace{(3^{3n} - 1)}_{\in \mathcal{M}_{13}} \in \mathcal{M}_{13}$ $\qquad$ $3^{3n+2} - 9 = 9\underbrace{(3^{3n} - 1)}_{\in \mathcal{M}_{13}} \in \mathcal{M}_{13}$

c) $A = 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} = 3^{2019}(1 + 3 + 9) = 3^{2019} \times 13 \in \mathcal{M}_{13}$

$\longrightarrow A \in \mathcal{M}_{13}$

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

Montrer par récurrence que pour tout nÎIN*, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2) Demontrons par recurrence P_n « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

pour n=1 $\begin{cases} S_1 = 1^3 = 1 \\ \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$ d'où P_1 est vraie.

supposons que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que : $(7a+5b)\wedge(4a+3b)=a\wedge b$.

3) posons $\begin{cases} d = a\wedge b \\ d' = (7a+5b)\wedge(4a+3b) \end{cases}$

$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d \mid 7a+5b \\ d \mid 4a+3b \end{cases} \Longrightarrow d \mid (7a+5b)\wedge(4a+3b) \Longrightarrow \underline{d \mid d'}$

$\begin{cases} d' \mid 7a+5b \\ d' \mid 4a+3b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d' \mid 3(7a+5b)-5(4a+3b)=a \\ d' \mid -4(7a+5b)+7(4a+3b)=b \end{cases} \longrightarrow d' \mid a\wedge b$

$\Longrightarrow \underline{d' \mid d}$

$\begin{cases} d' \mid d \\ d \mid d' \end{cases} \xrightarrow{d,d' \in \mathbb{N}} d = d'$

conclusion : $(7a+5b)\wedge(4a+3b) = a\wedge b$

Exercice N°4

On pose $f(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ pour $x \in IR$.

1) Calculer $f(\frac{5\pi}{12})$ et $f(\frac{3\pi}{8})$

2) a) Montrer que $f(x) = 1+\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$.

b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x.\cos(x+\frac{\pi}{4})$

b) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\cos(x+\frac{\pi}{4}) \leq 0$

c) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation : $f(x) > 0$.

1) $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

2) a) $f(x) = 1+\cos 2x - \sin 2x$

$= 1+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$

$= 1+\sqrt{2}\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2x+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $2x+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$ ou $2x = \pi$ d'où $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$

On pose $f(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $f(\frac{5\pi}{12})$ et $f(\frac{3\pi}{8})$

2) a) Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.

b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

b) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 0$

c) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation : $f(x) > 0$.

3) a) $f(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$

$= 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 2\cos x(\cos x - \sin x)$

$= 2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

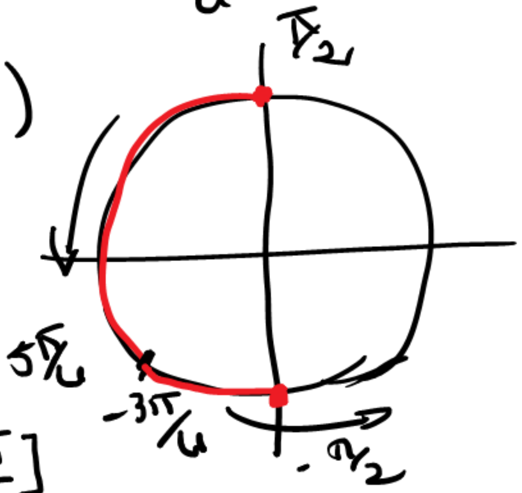
$= 2\sqrt{2}\cos x\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow f(x) = 2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 0 \\ x + \frac{\pi}{4} \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$

$\Leftrightarrow x \in]-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \pi]$



d'où $S_{]-\pi,\pi]} =]-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \pi]$

On pose $f(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $f(\frac{5\pi}{12})$ et $f(\frac{3\pi}{8})$

2) a) Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.

b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

b) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 0$

c) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation : $f(x) > 0$.

c)

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\cos(x+\frac{\pi}{4})$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $S_{]-\pi,\pi]} =]-\pi, -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$