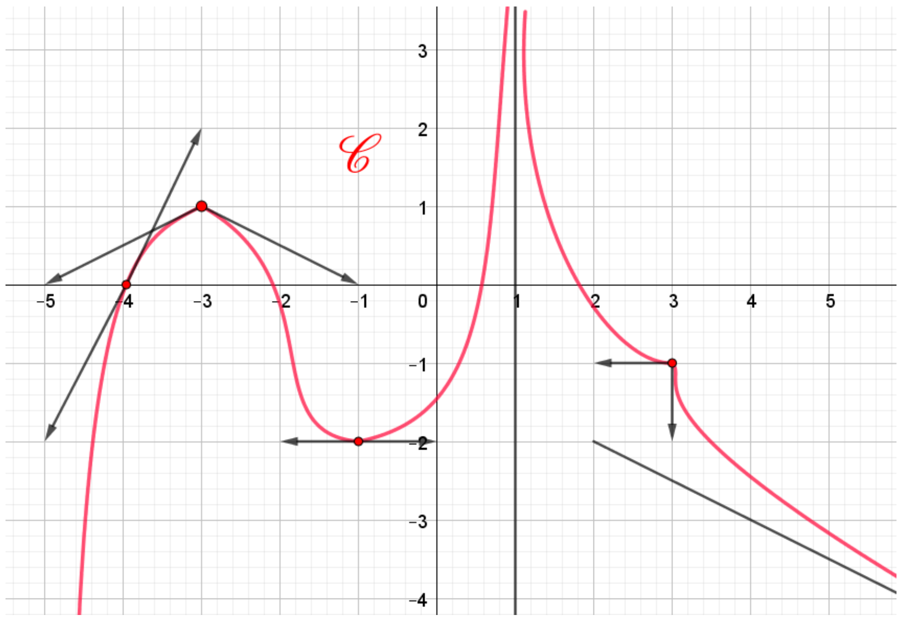
Exercice N°1 (4 points)



Dans la figure ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f .

Par lecture graphique :

1/ Déterminer :

a/ Df

b/ Les intervalles sur les quels f est continue.

c/ Les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer :

a/ f '(-4) ; $f'_g(-3)$; $f'_d(-3)$; f '(-1).

b/ $\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)+1}{x-3}$ et $\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)+1}{x-3}$

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim_{x\to -4} \frac{2f(x)-x-4}{x+4}$ b) $\lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x+3}$ c) $\lim_{x\to -1} \frac{(f(x))^2+4f(x)+4}{(x+1)^2}$

4/ Dresser le tableau de variation de f.

Exercice N°2 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x}+x+1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Calculer $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 5 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

b/ Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = 2x + $\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer f '(x) pour x < 0 .

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f '(x) pour x > 0.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C , d'abscisse x < 0, parallèle à la droite $\Delta : 3x - 4y + 13 = 0$. (On donnera les coordonnées du point de contact)

Exercice N°3 (5 points)

NB : Les questions 1) 2) 3) de cet exercice sont indépendantes

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{3n} - 1$ est divisible par 13.
   b) En déduire que les entiers $3^{3n+1} - 3$; $3^{3n+2} - 9$ sont divisibles par 13.
   c) On pose $A = 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021}$. Montrer que : A est divisible par 13.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

   Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que : $(7a + 5b) \wedge (4a + 3b) = a \wedge b$.

Exercice N°4 (5 points)

On pose $f(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ pour $x \in IR$.

1) Calculer $f(\frac{5\pi}{12})$ et $f(\frac{3\pi}{8})$

2) a) Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.
   b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x.\cos(x + \frac{\pi}{4})$
   b) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 0$
   c) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation : $f(x) > 0$.