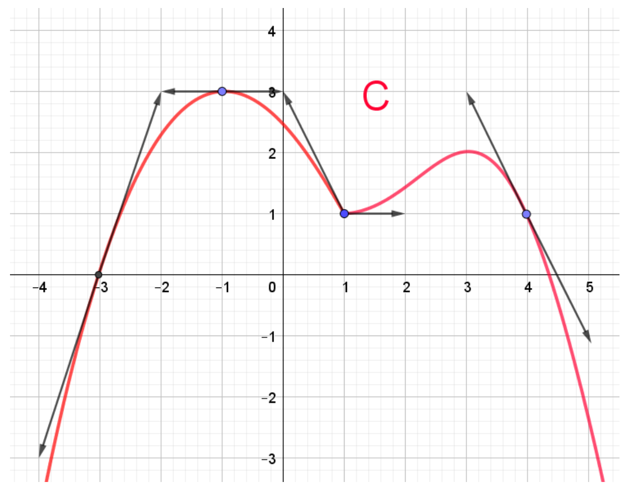
L.P. Kairouan	**Devoir de Contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 11 / 02 /2020	**Durée : 2heures**	**Classe : 3M$_3$**

Exercice N°1 (4 points)

Dans la figure ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.



Par lecture graphique :

1/ Déterminer les intervalles sur les quels f est dérivable.

2/ Déterminer f '(-3) ; f '(-1) ; $f'_g(1)$; $f'_d(1)$ et f '(4).

3/ Déterminer, en justifiant :

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2f(x)-6}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)+x-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-4}$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(f(x))^2-2f(x)+1}{(x-1)^2}$

Exercice N°2 (6 points)

NB : Les questions 1) 2) 3) et 4) de cet exercice sont indépendantes

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

b) En déduire que les entiers $2^{3n+1} - 2$; $2^{3n+2} - 4$ sont divisibles par 7.

c) On pose $A = 2^{2018} + 2^{2019} + 2^{2020}$. Montrer que : A est divisible par 7.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier naturel n, l'entier $A = 2n^2 - 7n + 6$ est-il premier ?

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple (x,y) d'entiers naturels vérifiant : $37x - 29y = 1$

4) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que : $(7a+9b)\wedge(3a+4b) = a\wedge b$.

Exercice N°3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+4x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 4 est une asymptote oblique à C au voisinage de - ∞.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite d'équation : y = x + 2 est une asymptote oblique à C au voisinage de + ∞.

2/ Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et que pour tout x < 0, $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout x > 0, $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$

c/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe C parallèle à la droite $\Delta : \mathbf{x - 2y - 2 = 0}$

Exercice N°4 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

1) a) Donner les coordonnées polaires de A et B.

   b) Représenter les points A et B.

2) On désigne par C le point de coordonnées cartésiennes $(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2})$

   a) Montrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

   b) Donner les coordonnées polaires de C.

   c) Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) Résoudre, dans $]-\pi,\pi]$, l'inéquation : $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Soit $f(x) = 1 - \cos 2x + \sin 2x$ pour $x \in IR$.

   a) Calculer $f(\frac{5\pi}{8})$

   b) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

   c) Résoudre dans $[0,2\pi]$: $f(x) = 0$