L.P.Ibn Khaldoun Kairouan	**Devoir de synthèse N°3**	**Prof : Chouihi**
Le : 11 / 05 /2023	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M**

Exercice N°1 (3,5 points)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0\,;\,t[$, notée $p([0\,;\,t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t. Cette loi est telle que $p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$, pour tout $t \in [0, +\infty[$ où λ est un réel strictement positif.
Pour chaque proposition choisisser la bonne et donner une justification

1/ Pour $t \geq 0$, $p([t, +\infty[) = \dots$

a/ $e^{-\lambda t}$ b/ $1 - e^{-\lambda t}$ c/ $e^{-\lambda t} - 1$

2/ La valeur de t pour laquelle $p([0,t[) = p([t, +\infty[)$ est égale à :

a/ $\frac{\lambda}{ln2}$ b/ $\frac{ln2}{\lambda}$ c/ $\frac{\lambda}{2}$

3/ D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,24. La valeur exacte de λ est alors :

a/ $\lambda = \ln(\frac{25}{19})$ b/ $\lambda = \ln(\frac{19}{25})$ c/ $\lambda = \frac{\ln(25)}{\ln(19)}$

Dans ce qui suit on prend $\lambda = 0,2$

4/ Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des quatre premières années après sa mise en service, la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il tombe en panne en au plus huit ans est égale à:

a/ 0,449 b/ 0,551 c/ 0,148

5/ Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par ***X*** la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des cinq premières années.
La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, de l'évènement ≪ X = 3 ≫ est égale à:

a/ 0,368 b/ 0,002 c/ 0,241

Exercice N°2 (3,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z
associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{(8+6i)}{5}\bar{z} + \frac{(-6+13i)}{5}$.

1) a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on déterminera le rapport et le centre.

b) Montrer que f a pour axe la droite Δ d'équation : $x - 3y + 3 = 0$

2) Déterminer l'ensemble D des points M(z) tels que z' soit imaginaire.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $4x + 3y = 3$.

b) En déduire les points de D dont les coordonnées sont des entiers et dont l'abscisse x vérifie $|x| \leq 2$.

c) Soit (x,y) une solution de (E), quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.

d) Déterminer les solutions (x,y) de (E) tels que : $x \wedge y = 3$ et $x \vee y = 189$

4) On considère les points M d'affixes $z = x + 2i$, où $x \in \mathbb{Z}$.
Déterminer les entiers x tels que Re(z') et Im(z') soient entiers.

Exercice N°3 (6 points)

A/ Soit l'équation différentielle (E) : $y' = y^2 - y$

1) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' = y - 1$
2) Soit f une fonction non nulle.

   Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $\frac{1}{f}$ est solution de (E_0)
3) Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour x = 0

B/ Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\dfrac{1}{1+e^x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (**<u>Unité : 2cm</u>**)

1) a) Dresser le tableau de variation de f

   b) Montrer que le point $I(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
2) a) Montrer que f est une bijection de IR sur $]0,1[$

   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0,1[$

   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0,1[$ et vérifier que :

   $\ln(1+e^{-\alpha}) = -(\alpha + \ln\alpha)$
3) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$' de f^{-1}.
4) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide obtenu par rotation de l'arc $\Gamma = \{M(x,y) \;/\; y = f(x) \text{ et } 0 \le x \le 1\}$ autour de l'axe des abscisses.

C/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)\,dt$

1) Vérifier que : $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$
2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}(\alpha^n - \frac{1}{2^n})$

   b) En déduire que pour tout entier $n \ge 2$, on a : $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$
3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le I_n \le \frac{\alpha}{2^n}$

   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$

Exercice N°4 (3 points)

Soit $a \in Z$

1/ Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2/ Vérifier que $a^3 \equiv a \ (mod 6)$

3/ a/ Montrer par récurrence que pour tout n∈IN, $a^{2n+1} \equiv a \ (mod 6)$

b/ En déduire que pour tout entier n ≥ 1, $a^{2n} \equiv a^2 \ (mod 6)$

4/ Résoudre dans Z^2 le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \ (mod 6) \\ x^3 y^2 \equiv 1 \ (mod 6) \end{cases}$

Exercice N°5 (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC. (voir figure sur la feuille à remettre)

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie O en C.

   a) Montrer que f a pour rapport $\sqrt{3}$ et pour angle $\frac{\pi}{6}$.

   b) Construire le point D image de B par f.

2) Soit Γ' le cercle de diamètre [AD] et E le point de Γ' tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Montrer que f(C) = E.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie O en C.

   a) Construire l'axe Δ de g et déterminer son rapport.

   b) Montrer que g(B) = D.

   c) caractériser $g \circ f^{-1}$.

4) La droite Δ recoupe les cercles Γ et Γ' respectivement en H et F.

a) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \sqrt{3}\overrightarrow{AH}$.

b) Soit M un du cercle Γ \{A, H}; la parallèle à (HM) menée de F coupe (AM) en P.

Montrer qu'il existe un point N du cercle Γ' tel que Δ est la médiatrice de [PN].

Feuille à remttre **Nom et prénom :** ……………………………………………………………………………