**L.P.Ibn Khaldoun Kairouan** **Devoir de synthèse N°3** **Prof : Chouihi**

**Le : 12 / 05 /2022** **Durée : 4heures** **Classe : 4M**

## Exercice N°1 (4 points)

1/ Soit $A = 7^{2041} - 3\times2^{2041}$

a/ Vérifier que $7^4 \equiv 1 \pmod{32}$

Déterminer alors, suivant les valeurs de l'entier naturel q, le reste de $7^q$ modulo 32.

b/ Déterminer le reste de A modulo 32 et le reste de A modulo 31

2/ Résoudre dans Z×Z l'équation (E) : $32x - 31y = 6$

3/ a/ Résoudre alors dans Z le système $\begin{cases} n \equiv 7\ (mod 32) \\ n \equiv 1\ (mod 31) \end{cases}$

b/ Déterminer le reste de A modulo 992

4/ On considère l'équation (F) : $7^p - 3\times2^m = 1$ où m et p sont des entiers naturels non nuls.

a/ On suppose que $m \leq 4$ . Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions que l'on déterminera.

b/ On suppose que $m > 4$ et (p,m) une solution de (F)

Montrer que $7^p \equiv 1 \pmod{32}$, en déduire que $7^p \equiv 1 \pmod{5}$

c/ Déterminer alors tous les couples (p,m) solutions de (F)

## Exercice N°2 ( 4 points)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel *n* :

• si à l'instant *n* la puce est en A, alors à l'instant ($n$ + 1), elle est : soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ ; soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$

• si à l'instant *n* la puce est en B, alors à l'instant ($n$ + 1), elle est : soit en C, soit en A de façon équiprobable

• si à l'instant *n* la puce est en C, alors elle y reste.

On note $A_n$ (respectivement $B_n$, $C_n$) l'évènement ≪ à l'instant n la puce est en A ≫ (respectivement en B, en C).

On note $a_n$ (respectivement $b_n$, $c_n$) la probabilité de l'évènement $A_n$, (respectivement $B_n$, $C_n$).

On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

1/ Calculer $a_k$, $b_k$ et $c_k$ pour k entier naturel tel que : $1 \leq k \leq 3$

2/ a/ Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \end{cases}$

b/ Montrer que, $\forall n \in IN$, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$

c/ En déduire que, $\forall p \in IN$, $\begin{cases} a_{2p} = (\frac{1}{6})^p \ et \ a_{2p+1=0} \\ b_{2p} = 0 \ et \ b_{2p+1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6})^p \end{cases}$

3/ a/ Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$

b/ On admet que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ ; quelle est la limite de $c_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

## Exercice N°3 ( 6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Vérifier que f est définie sur $D = ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ puis montrer que $\mathscr{C}$ admet un axe de symétrie $\Delta$ à préciser.

2/ a/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b/ Montrer que $\forall x\in D$, $f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}$ et calculer la limite de f ' en $+\infty$.

c/ Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}$.

3/ Calculer l'aire de la partie délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 2

4/ Pour $n\in IN^*$, on pose $U_n = f(n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a/ Montrer que $\forall n\in IN^*$, $U_n = \int_0^1 \frac{1-2x}{2(n+x)}dx$

b/ On pose pour $n\in IN^*$, $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{2(n+x)}dx$ et $b_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x-1}{2(n+x)}dx$

Montrer que $\forall n\in IN^*$, $\frac{1}{4(2n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{8n}$ et $\frac{1}{8(n+1)} \leq b_n \leq \frac{1}{4(2n+1)}$

c/ En déduire que la suite $(S_n)$ est majorée par 1/8 et qu'elle converge vers un réel $\alpha$

d/ Montrer que $\forall n\in IN^*$, $S_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \ln(n!) - n$

5/ On pose pour tout $n \geq 2$, $V_n = e^{1-S_{n-1}}$ et on admet que $\alpha = 1 - \frac{\ln(2\pi)}{2}$

a/ Montrer que $\forall n \geq 2$, $V_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

## Exercice N°4 ( 6 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle ABCD de centre O et de sens direct et tel que AB = 2AD.
On note I le milieu de [AB] et J celui de [ID], E le symétrique de I par rapport à A et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par I.

1/ Soit S la similitude directe de centre D telle que S(I)=A

a/ Déterminer le rapport et l'angle de S.

b/ Déterminer S(C).

2/ Soit f la similitude directe qui transforme D en I et A en C.

a/ Montrer que f admet un centre $\Omega$ et préciser un angle de f.

b/ Montrer que $\Omega$ est un point de $\mathscr{C}$.

c/ Déterminer f< $\mathscr{C}$ >. En déduire que $\Omega$ et I sont symétriques par rapport à (AC).

3/ La perpendiculaire à $(\Omega D)$ en $\Omega$ recoupe f< $\mathscr{C}$ > en F.

a/ Montrer que f(I) = F

b/ Montrer que ICFD est un carré.

4/ Soit $\varphi$ = Sof et K le projeté orthogonal de D sur $(\Omega E)$.

a/ Caractériser $\varphi$.

b/ Montrer que $J\Omega K$ est rectangle et isocèle en J.

5/Soit g la similitude indirecte tel que $g(\Omega)$ = B et g(O) = C.

a/ On pose $h = goS_{(AC)}$. Déterminer h(O) et h(I) puis caractériser h

b/ Donner la forme réduite de g.