L.P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°3**	**Prof : Chouihi**
Le : 17 / 05 / 19	**Durée : 4heures**	**Classe : $4M_1$**

Exercice N°1 (3,5 points)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; on considère les points $A\left(\frac{1}{2},\frac{-3}{2},\frac{3}{2}\right)$, B(1, 0, 1), C(0, 0, 2) et D(-1, -2, 2).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$.
   b) Vérifier qu'une équation du plan P = (BCD) est : $2x - y + 2z - 4 = 0$.

2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

3) a) Montrer que le point $H\left(\frac{1}{6},\frac{-4}{3},\frac{7}{6}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.
   b) Montrer que, dans le plan P, H est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle BCD.

4) Soit f l'application de ξ dans ξ qui à tout point M associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}$$

   a) Montrer que f est une translation dont on précisera le vecteur.
   b) Donner les expressions analytiques de f.

Exercice N°2 (4points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ On désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M(x,y) du plan tel que : $2x + 4y^2 - 5 = 0$.
   a) Montrer que $\mathscr{P}$ est une parabole dont on déterminera le sommet S, le foyer F et la directrice D.
   b) Vérifier que le point $A(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$ appartient à $\mathscr{P}$.
   c) Montrer que la tangente T à $\mathscr{P}$ en A a pour équation : $x + 2y\sqrt{5} - 5 = 0$

2/ a) Tracer $\mathscr{P}$.
   b) Calculer l'aire de l'une des deux parties du plan limitée par $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.
   c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la parabole $\mathscr{P}$ et la tangente T.

3/ Pour tout réel non nul m, on pose D_m la droite d'équation : $y = mx - \frac{9}{4}m$.

D_m coupe $\mathscr{P}$ en deux points M et N.
   a) Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [MN].
   b) Montrer que I varie sur une parabole $\mathscr{P}'$ dont on caractérisera.

Exercice N°3 **(3,5 points)**

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour **t** appartenant à [0 ; 30], on note **y(t)** le pourcentage de personnes touchées par la maladie après **t** jours.
On a donc **y(0) = 0,01**.
On admet que la fonction **y** ainsi définie sur [0;30] est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0{,}05y(10 - y)$$

1/ On considère la fonction **z** définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \dfrac{1}{y}$

Démontrer que la fonction **y** satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$

si et seulement si la fonction **z** satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$

2/ a) En déduire une expression de la fonction **z** puis celle de la fonction **y**.
b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.

1/ Montrer que la probabilité de l'évènement ≪ l'individu n'est pas vacciné et tombe malade ≫ est égale à **0,08**.

2/ Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice N°4 **(4 points)**

(U_n) est une suite géométrique croissante de premier terme U_0 et de raison q tels que : $\begin{cases} \ln(U_1) + \ln(U_2) = 11 \\ U_1 + U_2 = e^4(1+e^3) \end{cases}$

1/ Calculer U_1 et U_2 et déduire la valeur de q.

2/ On donne $U_1 = e^4$ et $q = e^3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Soit $S_n = \ln(U_0) + \ln(U_1) + \ldots + \ln(U_n)$. Exprimer S_n en fonction de n.

3/ Soit $a_n = n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que $(2S_n) \wedge a_n = a_n \wedge 14$
b) Déterminer les valeurs possibles de $(2S_n) \wedge a_n$.
c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles on a : $(2S_n) \wedge a_n = 7$.

4/ Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 7 de 2^n.

5/ Soit $b_n = 3n \times a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a : $\begin{cases} b_n \equiv 0 \pmod 7 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

6/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a : $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ est divisible par 7.

Exercice N°5 **(5 points)**

1/ Soient les fonctions F et G définie sur]0, +∞[par :

$$F(x) = \ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad G(x) = \ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x}$$

Montrer en appliquant le théorème des accroissements finis sur un intervalle convenablement choisi que :

Pour tout $x > 0$, $G(x) < 0 < F(x)$.

2/ Soient les fonctions f et g définies sur]0, +∞[par : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ et $g(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+1}$

a) Montrer que f et g sont dérivables sur]0,+∞[et montrer que pour tout $x > 0$:

$f'(x) = F(x).f(x)$ et $g'(x) = G(x).g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f et celui de g.

c) En déduire que : pour tout $x > 0$, $(1+\frac{1}{x})^x < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}$.

d) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

3/ Soit h la fonction définie sur]0, +∞[par $h(x) = g(x) - f(x)$

a) Prouver que pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{f(x)}{x}(F(x) - \frac{1}{x})$

b) Etudier les variations de h.

c) Tracer la courbe représentative C de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ Soit $n \in IN^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(\frac{k+1}{k})^k$

a) Montrer que $\int_1^n h(x)dx \le S_n$

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$