L.P.Ibn. Khaldoun Kairouan	**Devoir de contrôle N°3**	**Prof : Chouihi**
Le : 04 / 05 / 23	**Durée : 3heures**	**Classe : 4M**

Exercice N°1 (5 points)

On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I. On désigne par J le milieu du segment [CD] et par *s* la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude *s*.

2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI] , Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]
Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3) Donner l'image par *s* de la droite (BC).
En déduire le point image par *s* du point C, puis le point K image par *s* du point I.

4) On pose h = sos.
a) Donner la nature de la transformation *h* (préciser ses éléments caractéristiques).
b) Trouver l'image du point A par *h*. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B et C aient comme affixes respectives 0, 2, et 2 + 2i.

1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude *s* est : $z'=\frac{1}{2}iz+1+i$

2) Calculer l'affixe du point Ω.

3) Calculer l'affixe du point E tel que s(E) = A .

Exercice N°2 (5 points)

En prévision des élections municipales, une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête pour recueillir les intentions des électeurs. On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3

1) On note les évènements : D_1 : « la personne décroche au premier appel » et R_1 : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».
a) Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
b) Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2) Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter. On note les évènements :
D_2 : « la personne décroche au second appel ».
R_2:«la personne répond au questionnaire lors du second appel»
R : « la personne répond au questionnaire ».
a) Montrer que $p((R_2\cap D_2)/\overline{D_1}) = 0,14$
b) En déduire que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3) On admet que la durée d'attente X en minutes d'un électeur à un bureau de vote donné est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,46$.
a) Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un électeur ne dépasse pas 5 minutes.
b) Calculer la probabilité qu'un électeur attendra plus qu'une demi heure .
c) Sachant qu'un électeur a attendu plus que 5 minutes quelle est la probabilité qu'il votera en au plus 10 minutes ?

Exercice N°3 (7 points)

A/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$

1/ Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = e^{\frac{-x}{2}}$

2/ Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si f – g est une solution de l'équation différentielle $E_0 : y' + \frac{1}{2}y = 0$

3/ Résoudre alors l'équation (E)

B/ Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur [0,1] par $f_n(x) = \sqrt{x^n}e^{\frac{-x}{2}}$

1/Etudier suivant les valeurs de n la dérivabilité de f_n à droite en 0

2/ Etudier les variations de f_n.

C/ On désigne par Γ_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par V_n le volume du solide de révolution obtenu par rotation Γ_n autour de l'axe des abscisses.

On a représenté ci-dessous les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 et Γ_6

1/ a/ Montrer que $V_1 = \pi(1 - \frac{2}{e})$

b/ Montrer que la suite (V_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente.

c/ Montrer que $\forall n \geq 1$, $V_{n+1} = \frac{-\pi}{e} + (n + 1)V_n$

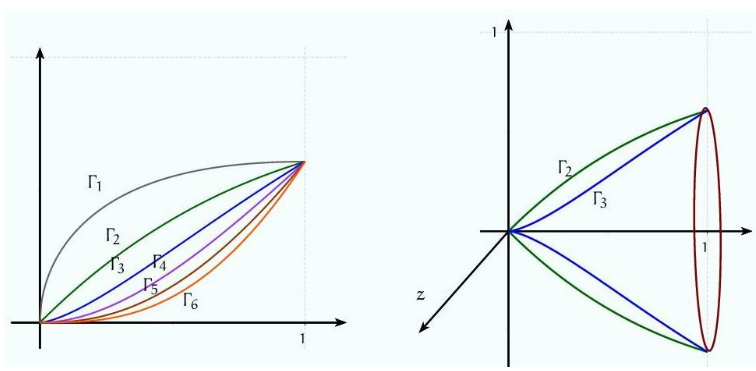
d/ En déduire que $\forall n \geq 1$, $V_n \leq \frac{\pi}{ne}$. Déterminer alors limV

2/ Pour tout $n \geq 1$, On pose $U_n = \frac{V_n}{n!}$

a/ Montrer que $\forall n \geq 1$, $U_{n+1} = U_n - \frac{\pi}{e(n+1)!}$

b/ Montrer que $\forall n \geq 1$, $U_n = \pi(1 - \frac{1}{e}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!})$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$

c/ Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides de révolution S_2 et S_3 obtenus par rotation de Γ_2 et Γ_3 autour de l'axe des abscisses.



Exercice N°4 (3 points)

Partie I On considère dans ZxZ l'équation (E) : 47x – 43y = 1

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4\ [43]$

1/ Soit $x \in Z$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$

b/ Montrer que $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)