L. P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°3**	**Prof: Chouihi**
Le : 01 – 05 – 2019	**Durée : 4heures**	**Classe: 4M$_1$**

Exercice N°1 (4 points)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 (Voir figure ci-dessous). On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AE] et [CD]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1/ a) Montrer que $\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{GK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

b) Calculer le volume du tétraèdre JGKI.

2/ a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (GIK) est : $2x + 2y - z - 3 = 0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (CJ).

3/ La droite (CJ) coupe le plan (GIK) en un point H'.

a) Vérifier que la droite (CJ) est perpendiculaire au plan (GIK).

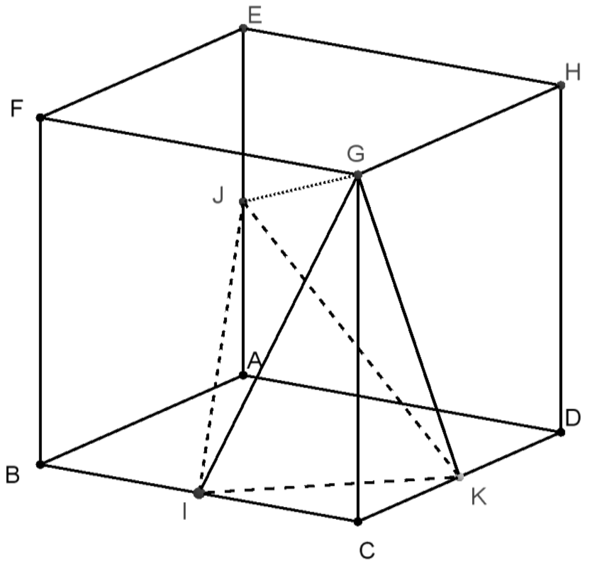
b) Déterminer les coordonnées du point H'.

4/ Soit S la sphère passant par C et tangente au plan (GIK) en H'.

a) Montrer que S est de centre $\Omega(\frac{8}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{18})$ et de rayon $R = \frac{3}{18}$

b) Montrer que le plan (ABC) coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le rayon r.

c) Soit h l'homothétie de centre C et qui transforme J en Ω. Soit Ω' le centre de $\mathscr{C}$.
Donner l'expression analytique de h puis vérifier que h(A) = Ω'.



Exercice N°2 (5 points)

Le service après -vente d'une entreprise, vendant une certaine marque de calculatrices, c'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier, l'autre à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier »,
A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ».
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1) a) Préciser à l'aide des énoncées les probabilités suivantes : p(A/C), $p(\overline{A}/\overline{C})$ et p(C).

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2) On choisit au hasard une calculatrice de cette marque.

a) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c) En déduire p(A).

d) Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

3) Chaque calculatrice est vendue à 35 dinars.

Le service après-vente doit prendre en charge les réparations au cas où aurait un défaut :

- Si la calculatrice présente un défaut de clavier, le coût de la réparation est de 3 dinars.
- Si la calculatrice présente un défaut d'affichage, le coût de la réparation est de 5 dinars.
- Si la calculatrice présente les deux défauts, on rembourse la calculatrice au client.

Soit X la variable aléatoire égale au montant du chiffre d'affaire réalisé par calculatrice vendue

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer alors le chiffre d'affaire que peut espérer faire l'entreprise par calculatrice.

4) On suppose que la durée de vie (exprimé en années) d'une calculatrice de cette marque est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,255$.

a) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice dure plus de 2 ans ?

b) Calculer la durée de vie moyenne d'une calculatrice de ce type.

c) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice dure plus de 5 ans sachant qu'elle a déjà durée plus de 3 ans

Exercice N°3 (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f l'application de p dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}\bar{z}$

1) a) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est l'axe des abscisses.

b) On pose z = x + iy et z' = x' + iy' où x, y, x' et y' sont des réels.

Montrer que f(M) = M' si et seulement si $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$

c) Soit M(x,y) un point quelconque du plan P et H sont projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

Montrer que f(M) = M' si et seulement si $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$.

d) On déduire que f est une bijection sur P.

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A(2i) et de rayon 2 ; on pose $(\mathscr{E}) = f < \mathscr{C} >$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de $(\mathscr{E})$ est : $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{E})$.

c) Tracer $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{E})$.

3/ Soit θ un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$. On considère les points M(2cosθ, 2sinθ + 2) et M' = f(M).

a) Vérifier que $M \in \mathscr{C}$.

b) Ecrire une équation de la tangente T au cercle $\mathscr{C}$ en M.

c) Ecrire une équation de la tangente T' à $(\mathscr{E})$ en M'.

d) Montrer que les droites T, T' et l'axe des abscisses sont concourantes.

4/ Soit $\mathscr{P}$ une parabole passant par A et de directrice l'axe $(O,\vec{i})$

a) Montrer que l'ensemble des foyers F de $\mathscr{P}$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de l'origine O.

b) En déduire l'ensemble des sommets S de P.

Exercice N°4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1 + x}$, on désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Soit g la fonction définie sur [0, +∞[par $g(x) = e^x - 1 + x$.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $g(x) > 0$.

2/ a) Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) On donne dans la figure sur la feuille jointe les ponts $A(0, 1 + \frac{1}{e})$, $B(1,1)$ et $C(2, \frac{e^2}{e^2+1})$.

i/ Montrer que la droite (AB) est tangente à C_f en B.

ii/ Tracer C_f.

3/ x étant un réel tel que $x > 0$.

a) Vérifier que : $e^{-x} < 1 < e^x$ puis déduire que $1 - e^{-x} < x < e^x - 1$.

b) Montrer alors que : $\dfrac{e^x}{2(e^x - 1)} < f(x) < \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$

4/ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $U_n = \displaystyle\int_{\ln(1+\frac{1}{n})}^{\ln(1+\frac{2}{n})} f(t)dt$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_{\ln(1+\frac{1}{n})}^{\ln(1+\frac{2}{n})} \frac{e^x}{e^x - 1}dx = \ln 2$

b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_{\ln(1+\frac{1}{n})}^{\ln(1+\frac{2}{n})} \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}dx = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\frac{n+1}{2n+1})$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n$.

5/ a) Soit φ la fonction définie sur]0, +∞[par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x + \ln(1+x)}$

i/ Vérifier que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{g(\ln(1+x))}$

ii/ Déduire que φ est strictement décroissante sur]0, +∞[.

b) On considère la fonction F définie sur]0, +∞[par $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(e+1)}^{\ln(x+1)} f(t)dt$

i/ Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[puis calculer F'(x).

ii/ Déduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(t)dt$

c) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(\frac{k}{n^2}) = \varphi(\frac{1}{n}) + \varphi(\frac{n+1}{n^2}) + \ldots + \varphi(\frac{2n-1}{n^2})$

i/ k est un entier tel que $n \leq k \leq 2n - 1$

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\varphi(\frac{k+1}{n^2}) \leq n^2 \displaystyle\int_{\frac{k}{n^2}}^{\frac{k+1}{n^2}} \varphi(t)dt \leq \varphi(\frac{k}{n^2})$

ii/ Déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 U_n \leq S_n \leq n^2 U_n + \varphi(\frac{1}{n})$

iii/ Déterminer alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$