L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°3**	**Prof : Chouihi**
Le : 22 / 03 / 18	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M$_2$**

Exercice N°1 (4 points)

On considère un carré ABCD carré de sens direct et de centre I. On désigne par J le milieu du segment [CD] et par *s* la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude *s*.

2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI] , Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ].
Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3) Donner l'image par *s* de la droite (BC).
En déduire le point image par *s* du point C, puis le point K image par *s* du point I.

4) On pose h = sos.
a) Donner la nature de la transformation *h* (préciser ses éléments caractéristiques).
b) Trouver l'image du point A par *h*. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B et C aient comme affixes respectives 0, 2, et 2 + 2i.

1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude *s* est : $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$

2) Calculer l'affixe du point Ω.

3) Calculer l'affixe du point E tel que s(E) = A .
Placer le point E sur la figure.

Exercice N°2 (4,5 points)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que le couple (13 ; 3) est une solution de l'équation (E).
2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres *c* et *g* sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

1) Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a \pmod 7$ et $x \equiv a \pmod{19}$ alors $x \equiv a \pmod{133}$.

2) a) On suppose que *a* n'est pas un multiple de 7. Démontrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod 7$ puis que $a^{108} \equiv 1 \pmod 7$
En déduire que : $(a^{25})^g \equiv a \pmod 7$

b) On suppose que a est un multiple de 7. Montrer que : $(a^{25})^g \equiv a \pmod 7$

c) On admet que pour tout entier naturel a : $(a^{25})^g \equiv a \pmod{19}$. Démontrer que : $(a^{25})^g \equiv a \pmod{133}$

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r \pmod{133}$ avec $0 \leq r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1 \pmod{133}$ avec $0 \leq r_1 < 133$

1) Justifier que $r_1 \equiv a$ [133].
2) Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59. Décoder ce message.

Exercice N°3 (4,5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis.
On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

PARTIE A.

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'événement « le membre choisi est une femme »,
- T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1) Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,4.

2) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

PARTIE B.

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1) Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
  a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
  b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
  Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - (0,7)^n$.
  c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

2) Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 dinars chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 dinars puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 dinars par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.
  a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
  b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ainsi que sa variance et son écart-type.

Exercice N°4 (7 points)

Soit f_n la fonction définie sur]-1,+∞ [par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^n}$, n entier naturel non nul.

On note C_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 2cm.

A/

1) a) Etudier les variations de f_1 et f_2 .
   b) Etudier la position relative de C_1 et C_2 puis les construire dans le même repère.
   c) Calculer , en cm², l'aire de la partie du plan limitée par C_1, C_2 et les droites d'équations : x = 0 et x =1.

2) Soit U_n la valeur minimale de f_n sur]-1,+∞[
   a) Montrer que : $U_n = f_n(n-1)$
   b) Pour $x \geq 0$, comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   En déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(U_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

B/ Pour $x \in]\frac{1}{e},+\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t)dt$

1) Justifier l'existence de F(x) pour $x \in]\frac{1}{e},+\infty[$

2) Montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{e},1[$ on a : $F(x) \leq x - \dfrac{x}{1+\ln x}$

   En déduire $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{e})^+} F(x)$

3) a) Montrer que pour tout $x > \frac{1}{e}$ on a : $F(x) = \dfrac{x}{(\ln x+1)^2} - 1 + 2\int_0^{\ln x} f_3(t)dt$

   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$ on a : $F(x) \geq \dfrac{x}{(\ln x+1)^2} - 1$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4) Montrer que la fonction F est une bijection de $]\frac{1}{e},+\infty[$ sur IR.

C/ Pour $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout n > 2 on a : $\dfrac{1}{n-1}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}) \leq I_n \leq \dfrac{e}{n-1}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})$

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) a) Exprimer $f_n'(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.
   b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1} et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$