Problèmes du premier degré _ Problème du second degré

Cours préparé par le prof: Lotfi Chouihi

A. Préliminaire

Activité

A tout réel x, on considère l'expression

$P(x) = 2x^3 – 3x^2 – 11x + 6$

1) **Calculer P(-1), P(0) , P(1) et P(2)**
2) **Vérifier que les réels -2, ½ et 3 sont solutions de l'équation P(x) = 0.**
3) **Etablir l'égalité $P(x) = 2(x+2)(x-1/2)(x-3)$**
4) **Déterminer le signe de P(x) pour $\frac{1}{2} < x < 3$**
5) **Résoudre dans IR l'inéquation $P(x) \geq 0$**

Commentaire

- **Les réels -2, ½ et 3 sont des solutions de l'équations P(x) = 0, ils sont aussi appelés des racines de l'expression P(x).**
- **L'équation P(x) = 0 est une équation du troisième degré à une inconnue.**

Application:

A l'aide de votre calculatrice, déterminer les racines de chacune des expressions suivantes:

$Q(x) = x^2 - 13x + 42$

$R(x) = x^3 - 8x^2 - 5x + 84$

B. Problèmes du premier degré

Activité N°1 page 18

Je pense un nombre je lui retranche 5 je multiplie le résultat obtenu par 2 puis j'ajoute 6 et je divise le résultat par 5, j'obtiens 2.

Quel nombre j'ai pensé ?

Activité N°3 page 18

Quel entier faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de $\frac{3}{5}$ pour obtenir $\frac{1}{2}$?

Activité N°5 page 18

Deux agences A et B de location de voitures présentent les tarifs suivants pour des véhicules identiques :

Agence A : Un forfait de 36 dinars par jour, plus $0^{d},450$ par Km parcouru.

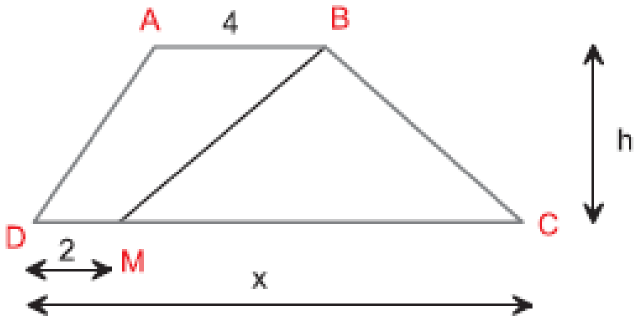
Agence B : Un forfait de 20 dinars par jour, plus $0^{d},650$ par Km parcouru.

a) Quelle est l'agence qui propose un tarif plus avantageux, selon que l'on doit effectuer dans une journée un parcours de 50 Km ou 150 Km ?

b) Soit x le nombre de kilomètres a parcourir dans la journée. Déterminer suivant x, l'agence qui propose un tarif plus avantageux.

Activité N°6 page 18

On considère un trapèze ABCD,
de hauteur h, de bases AB = 4
et CD = x, avec x > 2.



Soit M un point de la base [CD] tel que DM = 2.

a) Déterminer les réels x tels que l'aire du triangle BMC soit inferieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze ABCD.

b) Déterminer les réels x tels que l'aire du triangle BMC soit comprise entre le quart et le tiers de l'aire du trapèze ABCD.

Exercice N°1

Résoudre dans IR chacune des équations suivantes:

a) $\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{7}{4}$ b) $\dfrac{3x-1}{x} = \dfrac{3x}{x+2}$

$c)\ \sqrt{x^2+5} = x+1$

d) $\sqrt{2x-3} = 5$ e) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x+5}$

Exercice N°2

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes:

$a)\ \dfrac{x^2-1}{x-3} \leq x+1$

b) $\dfrac{3x-1}{x} \geq \dfrac{3x}{x+2}$

c) $\sqrt{x-3} \prec \sqrt{2x+5}$

d) $|x^2 -1| + |x + 1| \leq 0$

C. Problèmes du second degré

Activité

Soit ABC un triangle tel que $AB = x + 3$, $AC = 3x + 4$ et $BC = 2x + 5$, où x est un réel positif.

1) Quelle condition doit satisfaire x pour que le triangle ABC soit rectangle en A?
2) Résoudre dans IR l'équation ainsi obtenue.
3) En déduire la valeur de x pour laquelle le triangle ABC est rectangle en A.

Définitions

Soient a, b et c trois réels tel que $a \neq 0$

- **L'équation: $ax^2 + bx + c = 0$ est dite équation du second degré d'inconnue x.**
- **Les réels a, b et c sont les coefficients de l'équation.**
- **L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du second degré.**

Application

Compléter le tableau suivant:

trinôme	$2x^2+3x-5$	x^2-x+3		x^2+6x
a			4	
b			7	
c			-5	

Activité

1) Etablir les égalités suivantes:

a) $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$

b) $2x^2 - 5x = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$

2) Ecrire chacun des trinômes suivants sous la forme:

$a[(x + p)^2 + q]$ où a, p et q sont des constantes réels.

a) $P(x) = x^2 - 4x + 3$ **b)** $Q(x) = x^2 + 7x + 12$

c) $R(x) = 2x^2 - 7x + 3$ **d)** $S(x) = 4x^2 + 6x + 5$

3) En déduire la résolution de chacune des équations:

a) $P(x)=0$ **b)** $Q(x)=0$ **c)** $R(x) = 0$ **d)** $S(x) = 0$

Activité

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

1) Etablir l'égalité :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right]$$

2) On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

Déterminer , suivant le signe de Δ, les solutions de l'équation: $P(x) = 0$.

Vocabulaire

- L'écriture $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}]$ est appelée forme **canonique** du trinôme $P(x)$.
- Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation: $ax^2 + bx + c = 0$.
- Toute solution de l'équation $P(x) = 0$ est aussi appelée **racine** du trinôme $P(x)$.

Récapitulation

Pour résoudre l'équation: $ax^2 + bx + c = 0$, on peut procéder comme suit:

- On calcule de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta < 0$ alors $S_{IR} = \Phi$

et dans ce cas le trinôme n'est pas factorisable

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

et dans ce cas: $ax^2+bx+c = a(x - x')(x - x'')$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $x' = x'' = \dfrac{-b}{2a}$

et dans ce cas: $ax^2+bx+c = a(x - x')^2$

Exercice N°1

Résoudre dans IR chacune des équations suivantes:

1) $x^2 - 13x + 42 = 0$

2) $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

3) $5x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice N°2

Factoriser, si c'est possible, chacun des trinômes suivants:

1) $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$
2) $Q(x) = 3x^2 + 8\sqrt{3}x + 16 = 0$
3) $R(x) = 7x^2 - 3x + 1$

Exercice N°3 (Equation bicarré)

Résoudre dans IR chacune des équation suivantes:

1) $\mathbf{x^4 - 13x^2 + 36 = 0}$
2) $\mathbf{4t^4 + 19t^2 - 5 = 0}$
3) $\mathbf{x^4 + 8x^2 + 15 = 0}$

Activité

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On suppose que $\Delta > 0$ et on désigne par x' et x'' les racines de $P(x)$.

1) **Exprimer, en fonction de a, b et c, $x' + x''$ et $x'x''$**
2) **a) Calculer $P(1)$ et $P(-1)$.**

   b) Compléter:

- **Si $a + b + c = 0$ alors $x' = \dots$ et $x'' = \dots$**
- **Si $a - b + c = 0$ alors $x' = \dots$ et $x'' = \dots$**

Application N°1

Sans calculer le discriminant, résoudre chacune des équations suivantes:

1) $x^2 - 7x + 6 = 0$

2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

3) $3x^2 - (3 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

Application N°2

On considère l'équation: $4x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{6} = 0$

1) **Sans calculer Δ, justifier l'existence de deux solutions x' et x'' de cette équation.**
2) **Calculer chacune des expressions:**

   a) $A = x'(x'')^2 + (x')^2x''$

   b) $B = (x')^3 + (x'')^3$

   c) $C = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$

Exercices

Exercice N°1

On donne $A = \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

1) Montrer que $A^2 = 8$

2) a / Vérifier que A est un réel négatif

b / En déduire une écriture de A à l'aide d'un seul radical

Exercices

Exercice N°2

On donne A = $2-\sqrt{3}$ et B = $2+\sqrt{3}$.

1) a) Calculer A² .

b) Déduire une simplification de $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

c) Ecrire $\dfrac{A}{B}$ sans radical au dénominateur.

2) On donne $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$.

Donner un encadrement de A.

3) Soit le produit P= $(1-\frac{1}{13})(1-\frac{2}{13})(1-\frac{3}{13})\ldots(1-\frac{21}{13})$

a) Déterminer le nombre de facteurs du produit P.

b) Calculer P.

Exercices

Traiter les exercices du 27 jusqu'à 33 pages et 13 du manuel

Casse tête

Vous devez écrire un nombre dans chacun des petits carrés formant le carré 3 x 3 de façon que :

- sur chaque ligne et sur chaque colonne, le produit des trois nombres soit toujours 144
- dans chaque carre 2 x 2, le produit des quatre nombres soit toujours égal a 6 x144.

Fonction impaire