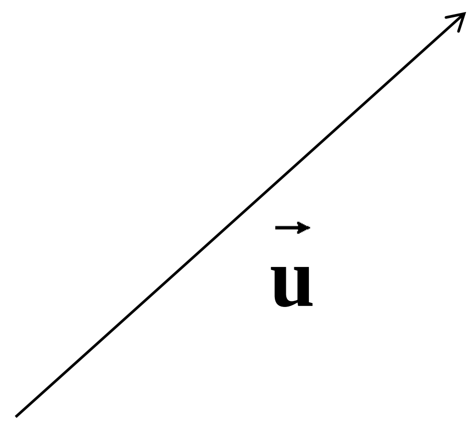
Calcul vectoriel

A. Notion de vecteur

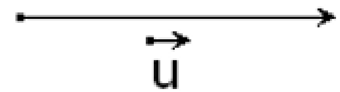
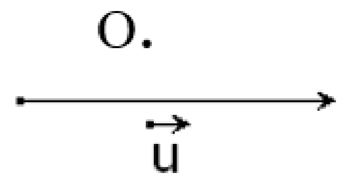
Définition

Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par:

- **Sa direction**
- **Son sens**
- **Sa valeur ou norme**



Activité1

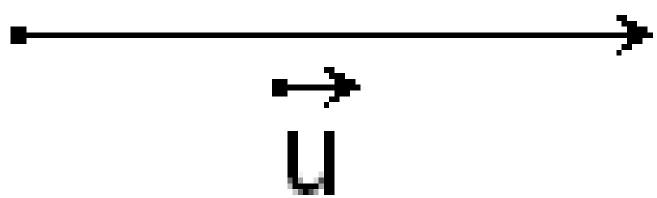
1	Construire un représentant (A,B) du vecteur $\vec{u}$ Ce représentant est-il unique ? Compléter : $\vec{u} = \ldots$	
2	O est un point donné du plan, construire un point M tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ Le point M est-il unique ?	

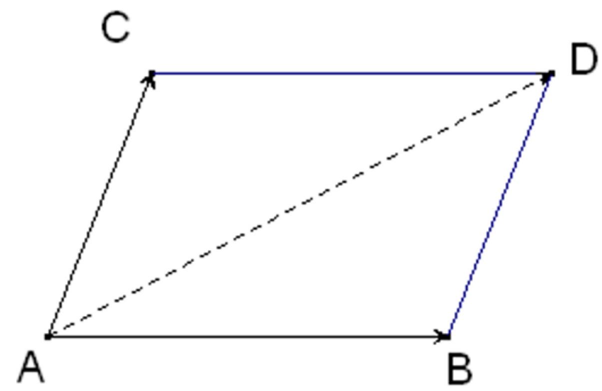
O est un point donné du plan, construire un point

M tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

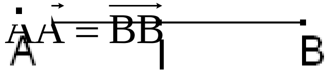
Le point M est il unique ?

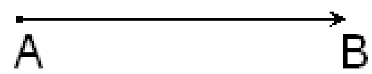
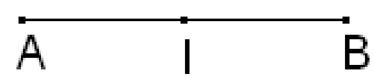
O .



3	• Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ • Compléter : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = ...$ équivaut à A*D = ….. équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = ...$ • Dans le cas où A, B et C ………………… $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un ……	

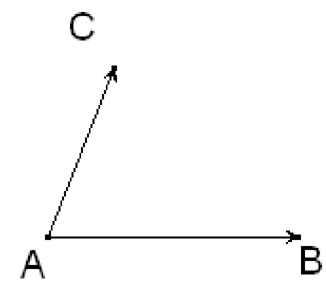
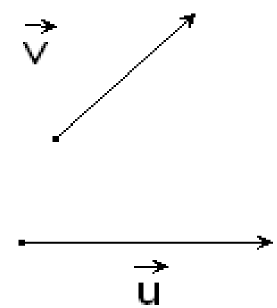
$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$

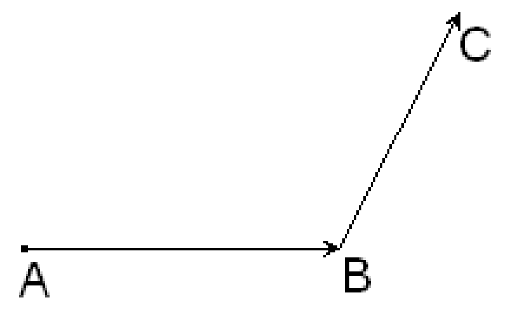


4	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à $M = \ldots.$	
5	$I = A*B$ équivaut à $\ldots\ldots. + \ldots\ldots.. = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} = \ldots$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \ldots$	
6	$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$	

B. Addition des vecteurs

Activité N°2

1	Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$	
2	Construire un vecteur $\overrightarrow{w}$ vérifiant : $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$	

3	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots$ Cette relation est appelée relation de ……………	
4	L'addition des vecteurs • Est commutative : …………………. • Est associative : ………………. • Admet un élément neutre, noté ……, et vérifiant : pour tous vecteur $\vec{u}$; $\vec{u}$ + …= … + … = … Tout vecteur $\vec{u}$ admet un vecteur opposé, noté $-\vec{u}$, et vérifiant : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \ldots$	

C. Multiplication d’un vecteur par un réel

Activité N°3

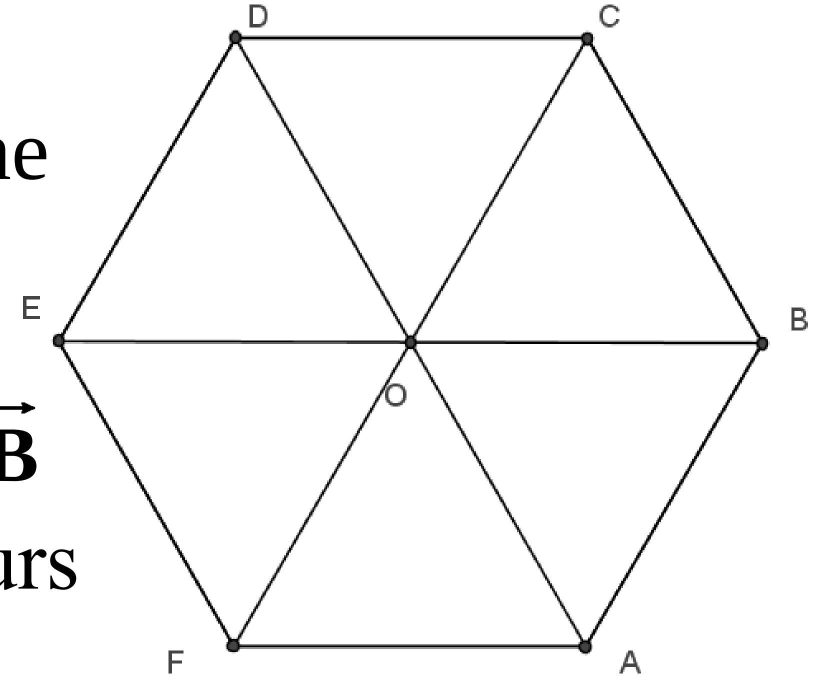
1	Construire le point C vérifiant : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$			
2	Construire le point D vérifiant : $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$			
3	Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et α est un réel alors $\alpha.\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ où M est le point de la droite ……… d'abscisse …. dans le repère (… , …)	$\alpha > 0$	$\alpha = 1$	$\alpha < 0$
4	$1.\vec{u} = \ldots$ $\qquad$ $0.\vec{u} = \ldots$			
5	$\alpha.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à ……………..			

D. Base de l'ensemble des vecteurs

Activité N°1

Sur la figue ci-contre ABCDEF est un hexagone régulier de centre O

1) Déterminer des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$
2) Déterminer des vecteurs non colinéaires à $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$



Activité N°2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, les vecteurs

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont définis par :

$$\vec{a} = (3\vec{u} - 4\vec{v}) + 5\vec{u} \text{ et } \vec{b} = (\vec{v} + 2\vec{u}) - 2\vec{v}$$

Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

sont colinéaires

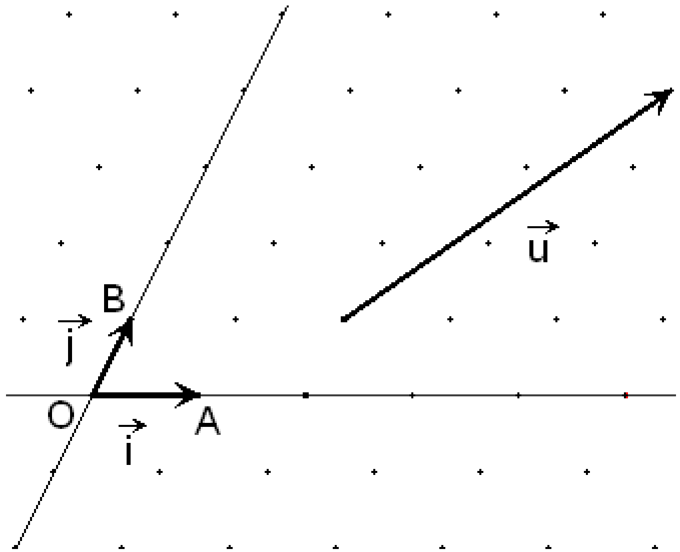
Définition

- **Deux vecteurs sont dits colinéaires si l'un d'eux est le produit de l'autre par un réel.**
- **Autrement dit: deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$**

NB: Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan

Activité

1. Reproduire sur votre cahier la figure ci-contre
2. Placer le point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$
3. Déterminer les coordonnées du point M dans le repère (O,A,B)
4. Exprimer, alors $\vec{u}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$



Définition

• On appelle base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan, tout couple $(\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ de vecteurs non colinéaires.

•Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ une base de $\mathcal{V}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique coule (x,y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

x et y sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Activité

Compléter

$\vec{0}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ **car ....**

$\vec{i}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ **car ....**

$\vec{j}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ **car ....**

Activité

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ une base de $\mathcal{V}$.

1) Pour quelle valeur de x a-t-on $\vec{u} = \vec{v}$?

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 2x-3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} -x+16 \\ x+5 \end{pmatrix}$$

2) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Déterminer les composantes des vecteurs: $2\vec{u}$,

$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ et $5\vec{u}-4\vec{v}$

Cas général

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ une base de $\mathcal{V}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, α et β réels.

$\vec{u} = \vec{v}$ **équivaut à....**

$(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(\alpha\vec{u})\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ $(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exercices N°4 et N°5 page 82

4 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

Donner les composantes des vecteurs suivants.

$2\vec{i} + 3\vec{j}$; $-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $-4\vec{i}$; $\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j}$; $-\frac{3}{5}\vec{j}$; $\frac{1}{2}\vec{j} + \vec{i}$.

5 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

Déterminer les composantes des vecteurs suivants, dans la base B.

$2\vec{u}$; $-3\vec{v}$; $4\vec{w}$; $\vec{u} - 5\vec{v}$; $-\sqrt{3}\,\vec{u} + 2\vec{v}$; $5\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$; $2\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

Condition de colinéarité de deux vecteurs

Activité

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors

$xy' - x'y = 0$

Théorème

$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires

ssi

$xy' - x'y = 0$

Vocabulaire: Le réel xy' – x'y est appelé déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On note: $\det(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Application: Exercice N°6 page 82

6 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) Dans chacun des cas suivants, préciser, si les deux vecteurs sont colinéaires ou non.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ -20 \end{pmatrix}$.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Repère cartésien du plan

Définition

$\mathcal{R} = (\ O, \vec{i}, \vec{j}\ )$ un repère du plan P

ssi

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}\ )$ une base de $\mathcal{V}$.

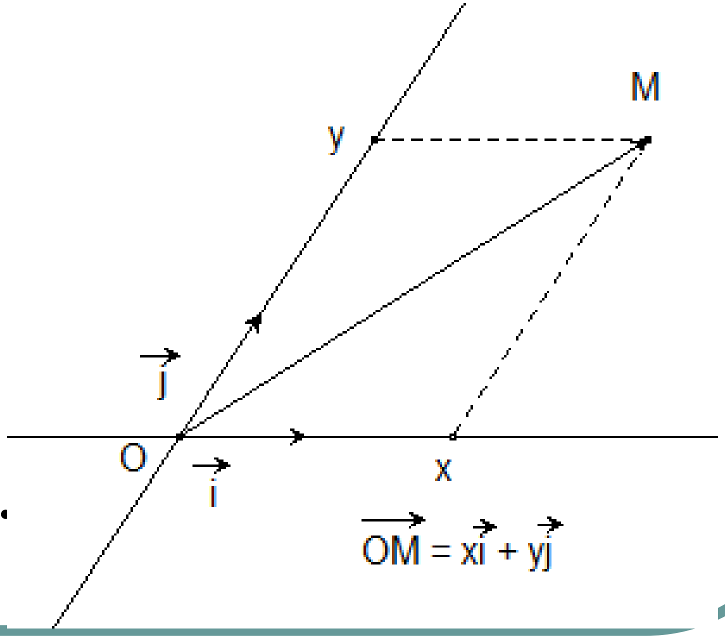
$(O,\vec{i}\ )$: axe des abscisses

$(O,\vec{j}\ )$: axe des ordonnées

x: abscisse de M

y: ordonnée de M

$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - xA}{y_B - yA}$ et A*B(…



Exercice N°7 page 82

7 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les composantes des $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et préciser si les deux vecteurs sont colinéaires ou non.

a) A(1 , 2) ; B(-3 , 4) ; C(0 , 1) et D(2 , -2).

b) A(0 , -2) ; B($\sqrt{2}$, 4) ; C(, -5) et D(-1 ,0).

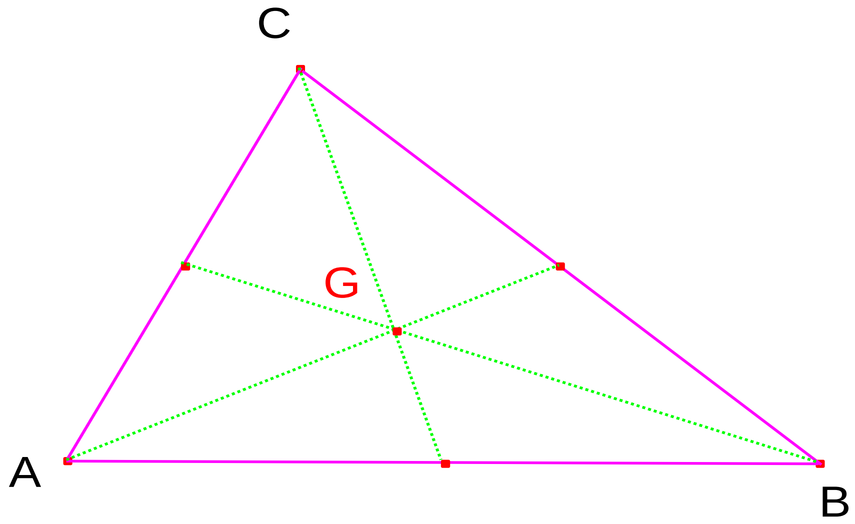
c) A(8 , -5) ; B(2 , -1) ; C(-19 , 8) et D(-1 , -4).

Formule

G est le centre de gravité du triangle ABC

ssi

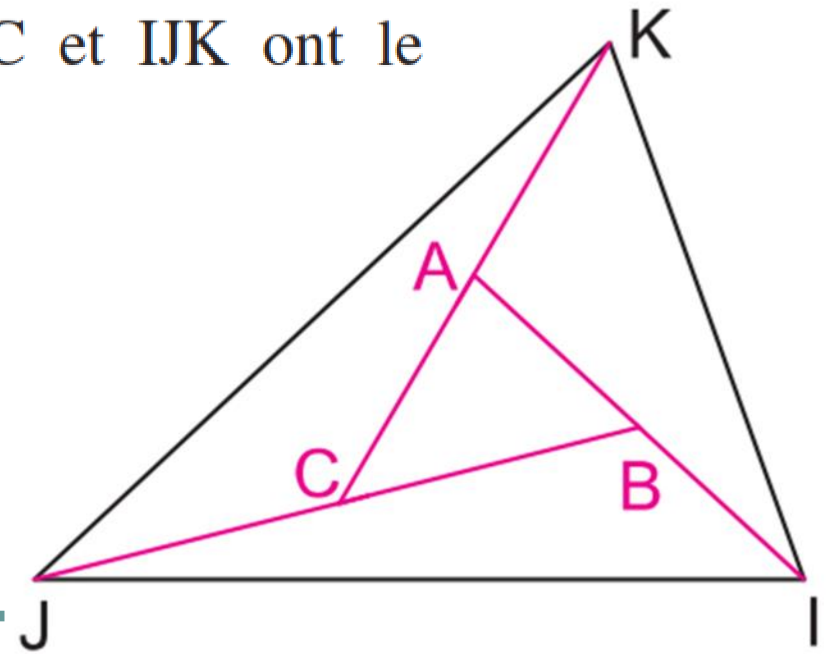
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



Exercice N°17 page 84

17 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le symétrique de A par rapport à B, J est le symétrique de B par rapport à C et K est le symétrique de C par rapport à A.

Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.



Définition

Soit $\vec{u}$ *un vecteur*, *on pose* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
On appelle **norme** de $\vec{u}$, le réel positif noté $\|\vec{u}\|$ et défini par $\|\vec{u}\| = AB$

N.B: Si $\|\vec{u}\| = 1$ alors $\vec{u}$ est dit unitaire ou normé.

Propriétés

- $\|\vec{u}\| = 0 \quad équivaut$ à $\vec{u} = \vec{0}$
- $\|k\vec{u}\| = |k|.\,\|\vec{u}\|$, k $\in$IR