Exercice N°1

Trouver trois entiers naturels dont la somme est égale à 70, sachant que la division du second par le premier donne 2 pour quotient et 1 pour reste et que la division du troisième par le second donne 3 pour quotient et 3 pour reste.

Exercice N°2

Montrer que pour tout entier naturel a le nombre N = a^3- a est divisible par 3.

Exercice N°3

1) Soit x = 638172 ; y = 75a1b

a) Déterminer le reste de la division Euclidienne de x par 11.

b) Déterminer les chiffres a et b pour que y soit divisible par 4 et que le reste de la division euclidienne de y par 9 soit égal à 5.

2) Soit x = 3n + 2 et y = 7n + 5, n est un entier naturel , on désigne par d un diviseur commun de x et y.

a)Donner une relation indépendante de n entre x et y

b) Montrer que x et y sont premier entre eux.

3) Déterminer les entiers naturels n pour que 2n + 14 soit divisible par n.

4) Soit n un entier naturel soit q le quotient de n par 11 et r le reste.

Montrer que si n est divisible par 4 alors q + 3r est divisible par 4.

Exercice N°4

Trouver les entiers naturels qui, en division euclidienne, divisés par 6 donnent pour reste 1 et divisés par 11 donnent 6

Exercice N°5

Quel est le plus petit entier positif qui admet pour restes 1, 1 et 5 lorsqu'il est divisé respectivement par 3, 5 et 7.

Exercice N°6

Combien existe-t-il de nombres entiers positifs à quatre chiffres deux à deux distincts dont le produit est égal à 48 ?

Exercice N°7

Soit n un entier naturel, on pose x = 6n + 15 et y = 2n + 3.

1) Soit d un entier naturel non nul.

Vérifier que x – 3y = 6 puis déduire que si d divise x et divise aussi y alors il divise 6

2) En déduire les valeurs possibles des diviseurs communs de x et y.

3) On pose $A = \frac{x}{y}$

a) Vérifier que $A = 3 + \frac{6}{2n+3}$.

b) Déduire les valeurs de n pour que A soit un entier naturel.

Exercice N°8

En multipliant un entier naturel de quatre chiffres $n = \overline{abcd}$ par 9 on obtient l'entier $n' = \overline{dcba}$.

Trouver n.

Exercice N°9

Démontrer que si un entier $\overline{xyz}$ est divisible par 27 alors l'entier $\overline{yzx}$ est divisible par 27.

Exercice N°10

Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres de la forme $\overline{abba}$, divisible par 9?

Exercice N°11

a, b, c et d étant des chiffres.

Soit x et y les entiers: $x = \overline{abcd}$ et $y = \overline{dcba}$.

Montrer que x + y est divisible par 11.

Exercice N°12

$N = 2^{12}x5^8$, Déterminer le nombre de chiffres de N.

Exercice N°13

Soit x, y et z trois entiers naturels tel que:

$x^2 + y^2 = z^2$.

Montrer que l'un au moins de ces trois entiers est multiple de 3.

Exercice N°14

1) Déterminer le nombre de diviseurs de 648.

2) Soit $n = 3^a.5^b$; où a et b sont deux entiers naturels.

Déterminer le nombre de diviseurs de n.

Exercice N°15

Soit x = 8n + 3 et y = 5n + 2, où n est un entier naturel.

Montrer que x et y sont premiers entre eux.

Exercice N°1 :

$\begin{cases} a+b+c=70 \\ b=2a+1 \\ c=3b+3 \end{cases}$ sig $\begin{cases} 9a=63 \\ b=2a+1 \\ c=6a+6 \end{cases}$ sig $\begin{cases} a=7 \\ b=15 \\ c=48 \end{cases}$

Exercice N°2 :

$N=a^3-a=a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$

si $a \in \mathcal{M}_3$ alors $N \in \mathcal{M}_3$

si $a=3k+1$ alors $a-1 \in \mathcal{M}_3$ donc $N \in \mathcal{M}_3$

si $a=3k+2$ alors $a+1 \in \mathcal{M}_3$ donc $N \in \mathcal{M}_3$.

Exercice N°3 :

1) a) on a : $2-7+1-8+3-6=-15=-22+7$ donc $\underline{r=7}$

b) $\begin{cases} y \in \mathcal{M}_4 \\ y-5 \in \mathcal{M}_9 \end{cases}$ sig $\begin{cases} 1b \in \mathcal{M}_4 \\ b+1+a+5+7-5 \in \mathcal{M}_9 \end{cases}$ sig $\begin{cases} b \in \{2,6\} \\ a+b+8 \in \mathcal{M}_9 \end{cases}$

sig $\begin{cases} b=2 \\ a=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} b=6 \\ a=4 \end{cases}$

2) a) $3y-7x=1$.

b) posons $d=PGCD(x,y)$.

$\begin{cases} d \text{ divise } x \\ d \text{ divise } y \end{cases}$ alors d divise $3y-7x=1$ donc $d=1$ d'où x et y sont premiers entre eux.

3) n divise $2n+14$ signifie $\underline{\dfrac{2n+14}{n}} \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

signifie $2+\dfrac{14}{n} \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ signifie n divise 14

signifie $n \in \{1,2,7,14\}$.

4) $n \in \mathcal{M}_4$ signifie $n=4k$, $k \in \mathbb{N}$ signifie $11q+r=4k$

signifie $12q+4r=4k+q+3r$ signifie $q+3r=4(3q+r-k) \in \mathcal{M}_4$.

Exercice N°4 :

$\begin{cases} n-1 \in \mathcal{M}_6 \\ n-6 \in \mathcal{M}_{11} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} n-1+6 \in \mathcal{M}_6 \\ n-6+11 \in \mathcal{M}_{11} \end{cases}$ signifie $n+5 \in \mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_{11}$

signifie $n+5 \in \mathcal{M}_{66}$ (car $66=PPCM(6,11)$)

signifie $\underline{n=66k-5}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Exercice N°5

$$\begin{cases} n-1 \in M_3 \\ n-1 \in M_5 \\ n-5 \in M_7 \end{cases} \text{ sig } \begin{cases} n-1+15\times 3 \in M_3 \\ n-1+9\times 5 \in M_5 \\ n-5+7\times 7 \in M_7 \end{cases} \text{ signifie } n+44 \in M_3 \cap M_5 \cap M_7$$

signifie $n+44 = PPCM(3,5,7) = 105$ donc $n = 61$

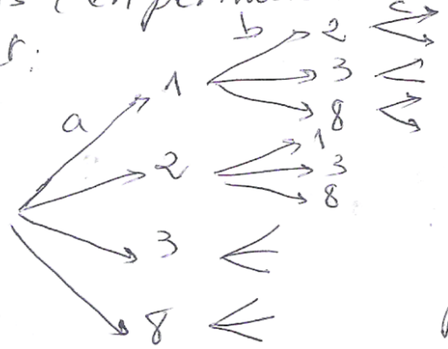
Exercice N°6

posons $n = \overline{abcd}$ avec $abcd = 48$ et a, b, c et d deux à deux distincts

On a : $48 = 2^4 \times 3 = 1\times 2\times 3\times 8 = 1\times 2\times 4\times 6$

* Chacune des décompositions de 48 fournie 24 nombres distincts (en permutant les chiffres)

En effet :



donc avec $\{1,2,3,8\}$ $4\times 3\times 2\times 1$ possibilités

d'où il y a 48 nombres possibles.

Exercice N°7

1) $x - 3y = 6n+15 - 6n - 9 = 6$.

Si $\begin{cases} d \text{ divise } x \\ d \text{ divise } y \end{cases}$ alors d divise $x - 3y = 6$ donc $d = 1$ ou $d = 2$ ou $d = 3$

2) si d divise x et y alors d divise 6 donc $d=1$ ou $d=2$ ou $d=3$ ou $d = 6$.

3) a) $A = \dfrac{6n+15}{2n+3} = \dfrac{3(2n+3)+6}{2n+3} = 3 + \dfrac{6}{2n+3}$.

b) $A \in \mathbb{N}$ ssi $2n+3$ divise 6 signifie $2n+3 \in \{1, 2, 3, 6\}$ signifie $n \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{n = 0}$

Exercice N°8 :

n et $9n$ sont à 4 chiffres exigent que $a = 1$ et $d = 9$.

et que $b = 0$ ou $b = 1$.

pour $b = 0$: $9n = n'$ sig $9\times \overline{10c9} = \overline{9c01}$ signifie $9(9+10c+1000) = 1+100c+9000$ sig $c = 8$

pour $b = 1$: on vérifie de la même manière que c n'est pas un chiffre.

Conclusion : $n = 1089$

Exercice N°9:

ⓐ $\overline{xyz} \in \mathcal{M}_{27}$ signifie $z + 10y + 100x = 27k$, $k \in \mathbb{N}$

signifie $z = 27k - 10y - 100x$

ⓑ $\overline{yzx} = x + 10z + 100y = x + 10(27k - 10y - 100x) + 100y$

$= 27 \times 10k - 999x = 27(10k - 37x) \in \mathcal{M}_{27}$.

Exercice N°10:

$\overline{abba} \in \mathcal{M}_9$ signifie $2a + 2b \in \mathcal{M}_9$. $\Big\} \longrightarrow 2a + 2b \in \{18, 36\}$

$\begin{cases} 0 < a \leq 9 \\ 0 \leq b \leq 9 \end{cases}$ alors $0 < 2a + 2b \leq 36$

$\in \mathcal{M}_9$ et pair.

donc $a + b = 9$ ou $a + b = 18$

$\begin{cases} a+b=9 \longrightarrow 9 \text{ nombres possibles} \\ a+b=18 \longrightarrow a=b=9 \quad \text{une seule possibilité} \end{cases}$

conclusion : il y a 10 nombres à 4 chiffres de la forme $\overline{abba}$.

Exercice N°11

$\begin{cases} x = d + 10c + 100b + 1000a \\ y = a + 10b + 100c + 1000d \end{cases}$

Alors : $x + y = 1001a + 110b + 110c + 1001d$

$= 11(91a + 10b + 10c + 91d) \in \mathcal{M}_{11}$.

Exercice N°12:

$N = 2^{12} \times 5^8 = (2 \times 5)^8 \times 2^4 = 16 \times 10^8 = 16\underbrace{00\ldots0}_{8 \text{ zeros}}$.

donc N est composé de 10 chiffres

Exercice N°13:

* vérifions d'abord que si $a \notin \mathcal{M}_3$ alors $a^2 = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}$.

En effet : si $a = 3k+1$ alors $a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

si $a = 3k+2$ alors $a^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$.

ⓑ supposons que x, y et $z \notin \mathcal{M}_3$ (par l'absurde)

alors : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3q_1 + 1 + 3q_2 + 1 = 3(q_1 + q_2) + 2 \longrightarrow \text{reste } 2 \\ z^2 = 3q_3 + 1 \longrightarrow \text{reste } 1 \end{cases}$

ce qui est absurde...